山梨大学

2016年 教育人間科学・生命環境（生命工以外） 第3問

3 xy 平面上に5点 O(0, 0)，A(1, 1)，B(1, 0)，P$\left(\frac{1}{2},\ t\right)$ $\left(\frac{1}{2} \leqq t < 1\right)$，Q($\alpha$, 0) $\left(\frac{1}{2} \leqq \alpha \leqq 1\right)$がある．A，Pを通る直線を ℓ とする．

(1) ℓ の方程式を求めよ．

(2) △APBにおいて，∠APB $\leqq 90°$ を示せ．

(3) ℓ に垂直でQを通る直線を m とする．ℓ と m の交点をRとするとき，Rの x 座標を α と t を用いた式で表せ．

(4) (3)のRが線分PA上にあるための α の範囲を t を用いた式で表せ．

(1) $y = \dfrac{1-t}{1-\frac{1}{2}}(x-1)+1$ よって，$\underline{\ell : y = 2(1-t)x + 2t - 1}$ //

(2) $AB = 1$，$AP = \sqrt{(1-\frac{1}{2})^2+(1-t)^2} = \sqrt{t^2-2t+\frac{5}{4}}$，$BP = \sqrt{(1-\frac{1}{2})^2+(0-t)^2} = \sqrt{t^2+\frac{1}{4}}$

$$\therefore \cos\angle APB = \frac{AP^2+BP^2-AB^2}{AP\cdot BP}$$

$$= \frac{t^2-2t+\frac{5}{4}+t^2+\frac{1}{4}-1}{AP\cdot BP}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(2t-1)^2}{AP\cdot BP}$$

$$\geqq 0$$

よって，∠APB $\leqq 90°$ ▨

(3) $m : y = \dfrac{1}{2(t-1)}(x-\alpha)$ $\therefore \dfrac{1}{2(t-1)}x - \dfrac{\alpha}{2(t-1)} - \{2(1-t)x+2t-1\} = 0$

$\therefore \left\{\dfrac{1}{2(t-1)} + 2(t-1)\right\}x = \dfrac{\alpha}{2(t-1)} + 2t - 1$ $\therefore \underline{x = \dfrac{4t^2-6t+2+\alpha}{4t^2-8t+5}}$ //

(4) $\dfrac{1}{2} \leqq \dfrac{4t^2-6t+2+\alpha}{4t^2-8t+5} \leqq 1$ となればよいから，分母は常に正に注意して，

$2t^2-4t+\frac{5}{2} \leqq 4t^2-6t+2+\alpha$ かつ $4t^2-6t+2+\alpha \leqq 4t^2-8t+5$

$\therefore 2t^2-2t-\frac{1}{2}+\alpha \geqq 0$ かつ $2t-3+\alpha \leqq 0$

$\therefore \underline{-2t^2+2t+\frac{1}{2} \leqq \alpha \leqq -2t+3}$ //