山梨大学

2016年 工学部・生命環境（生命工）第1問

1 次の問いに答えよ．

(1) $\angle A = 90°$ の直角二等辺三角形 ABC において，3辺 AB，BC，CA 上の点をそれぞれ P，Q，R とする．線分 AQ，BR，CP は1点で交わり，AP : PB = 3 : 1 かつ $\angle ARB = 60°$ とする．このとき，$\dfrac{BQ}{QC}$ を求めよ．

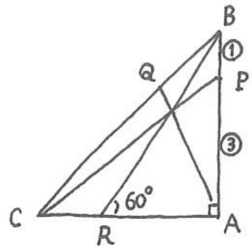
(2) 複素数 z の方程式 $z^4 = -8 - 8\sqrt{3}i$ の解をすべて求めよ．

(3) 初項 $a_1 = 3$，公差4の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．また，a_1，a_2，…，a_n の n 個の値からなるデータの平均値 m および分散 s^2 を，n を用いた式で表せ．

(1) $RA : AB = 1 : \sqrt{3}$，$AB = AC$ より

$RA : AC = 1 : \sqrt{3}$

$\therefore CR : RA = \sqrt{3} - 1 : 1$



チェバの定理より，$\dfrac{\sqrt{3}-1}{1} \times \dfrac{3}{1} \times \dfrac{BQ}{QC} = 1$

$$\therefore \frac{BQ}{QC} = \frac{1}{3(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{3(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \underline{\frac{\sqrt{3}+1}{6}}$$

(2) $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(r > 0, 0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおくと $z^4 = r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)$

一方，$-8 - 8\sqrt{3}i = 16\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2^4\left\{\cos\left(\frac{4}{3}\pi + 2n\pi\right) + i\sin\left(\frac{4}{3}\pi + 2n\pi\right)\right\}$ （n：整数）

$$\therefore r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) = 2^4\left\{\cos\left(\frac{4}{3} + 2n\right)\pi + i\sin\left(\frac{4}{3} + 2n\right)\pi\right\}$$

$$\therefore r = 2 \text{ かつ } \theta = \left(\frac{1}{3} + \frac{n}{2}\right)\pi$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より，$n = 0, 1, 2, 3$ そのとき $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{6}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{11}{6}\pi$

以上より，$\underline{z = 1 + \sqrt{3}i,\ -\sqrt{3} + i,\ -1 - \sqrt{3}i,\ \sqrt{3} - i}$

(3) $a_n = 3 + 4(n-1)$ $\therefore \underline{a_n = 4n - 1}$

$$m = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2}n(3 + 4n - 1) = \underline{2n + 1}$$

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(4k-1)^2 - (2n+1)^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(16k^2 - 8k + 1) - (4n^2 + 4n + 1)$$

$$= \frac{1}{n}\left\{\frac{8}{3}n(n+1)(2n+1) - 4n(n+1) + n\right\} - 4n^2 - 4n - 1$$

$$= \underline{\frac{4}{3}(n+1)(n-1)}$$