2016年 工学部・生命環境（生命工） 第2問　1枚目/2枚

数理石井K

$\boxed{2}$ 四面体OABCにおいて，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおき，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{4}{3}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{4}{3}$ を満たすとする．点Cから平面OABに垂線を下ろし，平面OABとの交点をHとする．

(1) ベクトル $\overrightarrow{OH}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) 四面体OABCの体積 V を求めよ．

(3) 辺BCの中点をMとし，線分AMを4：1に内分する点をNとする．このとき，直線CHと直線ONが交わることを示せ．また，その2直線の交点をPとするとき，CP：PHを求めよ．

(1) 点Hは平面OAB上の点より．$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}$（s, tは実数）と表せる．

$\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{OH}-\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}$

$\overrightarrow{CH}\perp$平面OABより．$\overrightarrow{CH}\cdot\vec{a}=0$ かつ $\overrightarrow{CH}\cdot\vec{b}=0$

$$\overrightarrow{CH}\cdot\vec{a}=s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}$$
$$=4s+2t-\frac{4}{3}$$

よって．$2s+t=\frac{2}{3}$ …①

$$\overrightarrow{CH}\cdot\vec{b}=s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}$$
$$=2s+3t-\frac{4}{3}$$

よって．$2s+3t=\frac{4}{3}$ …②

①，②より．$s=\frac{1}{6}$，$t=\frac{1}{3}$　$\therefore\ \underline{\overrightarrow{OH}=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}}$ //

(2) (1)より．$\overrightarrow{CH}=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}-\vec{c}$

$$\therefore |\overrightarrow{CH}|^2=\frac{1}{36}|\vec{a}|^2+\frac{1}{9}|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+\frac{1}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{c}\cdot\vec{a}$$
$$=\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+1+\frac{2}{9}-\frac{8}{9}-\frac{4}{9}$$
$$=\frac{1}{3}$$

$\therefore |\overrightarrow{CH}|=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\triangle OAB=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4\cdot3-4}=\sqrt{2}$

$\therefore V=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\underline{\frac{\sqrt{6}}{9}}$ //

2枚目へつづく

2016年 工学部・生命環境（生命工）第2問　2枚目/2枚　数理 石井K

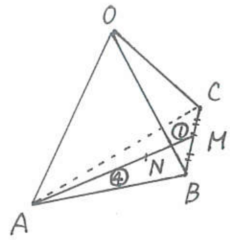
$\boxed{2}$ 四面体OABCにおいて，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおき，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{4}{3}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}=\dfrac{4}{3}$ を満たすとする．点Cから平面OABに垂線を下ろし，平面OABとの交点をHとする．

(1) ベクトル $\overrightarrow{OH}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) 四面体OABCの体積 V を求めよ．

(3) 辺BCの中点をMとし，線分AMを4：1に内分する点をNとする．このとき，直線CHと直線ONが交わることを示せ．また，その2直線の交点をPとするとき，CP：PHを求めよ．

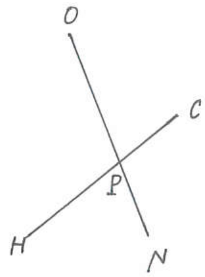
(3) $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$



$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{4}{5}\overrightarrow{OM}$

$=\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}$

点Pは直線ON上の点より．$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{ON}$ （kは実数）と表せる．



よって，$\overrightarrow{OP}=\frac{k}{5}\vec{a}+\frac{2k}{5}\vec{b}+\frac{2k}{5}\vec{c}$

$\therefore\ \overrightarrow{CP}=\frac{k}{5}\vec{a}+\frac{2k}{5}\vec{b}+\left(\frac{2k}{5}-1\right)\vec{c}$

点Pは直線CH上の点より．$\overrightarrow{CP}=m\overrightarrow{CH}$ （mは実数）と表せる．

よって．$\frac{k}{5}\vec{a}+\frac{2k}{5}\vec{b}+\left(\frac{2k}{5}-1\right)\vec{c}=\frac{m}{6}\vec{a}+\frac{m}{3}\vec{b}-m\vec{c}$

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ は1次独立より．

$$\begin{cases}\frac{k}{5}=\frac{m}{6}\\ \frac{2k}{5}=\frac{m}{3}\\ \frac{2k}{5}-1=-m\end{cases}$$

これを解くと．$k=\frac{5}{8}$，$m=\frac{3}{4}$

このとき．$\overrightarrow{OP}=\frac{5}{8}\overrightarrow{ON}$，$\overrightarrow{CP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CH}$ となり．直線CHと直線ONは点Pで交わる．

さらに．$CP:PH=\frac{3}{4}:\frac{1}{4}=\underline{3:1}$ //