獨協医科大学

2014年 医学部 第3問

数理 石井K

3 空間に，同一直線上にない3点O，A，Bがあり，条件

$|\overrightarrow{OA}|=2,\quad |\overrightarrow{OB}|=1\quad \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-1$

を満たしている．O，A，Bを通る平面を α とし，α 上にない点Pを次の条件を満たすようにとる．

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=2,\quad \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}=-1$

点Pから平面 α に下ろした垂線と α との交点をHとすると

$$\overrightarrow{OH}=\frac{\boxed{ア}\ 1}{\boxed{イ}\ 3}\overrightarrow{OA}-\frac{\boxed{ウ}\ 2}{\boxed{エ}\ 3}\overrightarrow{OB}$$

となる．$|\overrightarrow{OP}|=p$ とおくと，△OPHの面積は

$$\frac{\boxed{オ}\ 1}{\boxed{カ}\ 3}\sqrt{\boxed{キ}\ 3\ p^2-\boxed{ク}\ 4}$$

と表される．

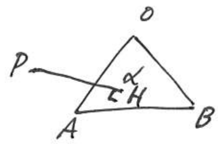
△OABの面積が△OPHの面積の2倍に等しいとき

$$p^2=\frac{\boxed{ケコ}\ 91}{\boxed{サシ}\ 48}$$

である．またこのとき，$\overrightarrow{PQ}=\frac{5}{3}\overrightarrow{PO}$ を満たす点Qをとると，四面体QOAHの体積は

$$\frac{\sqrt{\boxed{ス}}\ 3}{\boxed{セソ}\ 18}$$

である．



$\overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ とおく $\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{OA}=0$，$\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ より．

$\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OP})=s|\overrightarrow{OA}|^2+t\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}$

$=4s-t-2$

$\therefore\ 4s-t=2\ \cdots①$

$\overrightarrow{OB}(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OP})=s\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+t|\overrightarrow{OB}|^2-\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}$

$=-s+t+1$

$\therefore\ s-t=1\ \cdots②$

①，②より．$s=\frac{1}{3},\ t=-\frac{2}{3}$

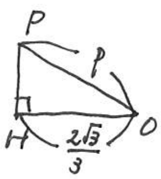
$\therefore\ \overrightarrow{OH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}-\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$ //

$|\overrightarrow{OH}|^2=\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}\quad \therefore\ |\overrightarrow{OH}|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\ \triangle OPH=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{p^2-\frac{4}{3}}$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3p^2-4}$

$=\frac{1}{3}\sqrt{3p^2-4}$ //



$\angle AOB=\theta$ とおくと．$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ \theta=120°$

$\therefore\ \triangle OAB=\frac{1}{2}\cdot2\cdot1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2}{3}\sqrt{3p^2-4}\qquad \therefore\ p^2=\frac{91}{48}$ //

$\triangle OAH=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OH}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH})^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{4\cdot\frac{4}{3}-\left(\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$QOAH=\frac{2}{3}POAH$

$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{p^2-\frac{4}{3}}$

$=\frac{2}{9\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\frac{91}{48}-\frac{4}{3}}$

$=\frac{\sqrt{3}}{18}$ //