



2013年理系第8問

 数理  
石井K

 8 関数  $f(x) = x(\log x)^2$  ( $x > 0$ ) について、次の問いに答えよ。ただし、対数は自然対数とする。

- (1) この関数の増減、極値、グラフの凹凸および変曲点を調べ、増減表を書け。  
 (2) 曲線  $y = f(x)$  と変曲点における接線、および直線  $x = 1$  によって囲まれる部分の面積を求めよ。

$$\begin{aligned} (1) f'(x) &= (\log x)^2 + x \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x} \\ &= (\log x)^2 + 2 \log x \\ &= \log x \cdot (\log x + 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f'(x) = 0 \text{ と なるのは} \\ x = 1, \frac{1}{e^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{x} \cdot (\log x + 2) + \log x \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{2(\log x + 1)}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f''(x) = 0 \text{ と なるのは} \\ x = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

よって増減表は右のようになる。

$x$	(0)	...	$\frac{1}{e^2}$	...	$\frac{1}{e}$	...	1	...	( $\infty$ )
$f'(x)$		+	0	-	-	-	0	+	
$f''(x)$		-	-	-	0	+	+	+	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

 (2) 変曲点は  $(\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$  なので接線は

$$y = -(x - \frac{1}{e}) + \frac{1}{e} \quad \therefore y = -x + \frac{2}{e}$$

$$\therefore S = \int_{\frac{1}{e}}^1 x(\log x)^2 + x - \frac{2}{e} dx$$

$$= \int_{\frac{1}{e}}^1 \left(\frac{x^2}{2}\right)' (\log x)^2 dx + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2}{e}x\right]_{\frac{1}{e}}^1$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} (\log x)^2\right]_{\frac{1}{e}}^1 - \int_{\frac{1}{e}}^1 x \log x dx + \frac{1}{2} - \frac{2}{e}$$

$$= \frac{-1}{2e^2} - \int_{\frac{1}{e}}^1 \left(\frac{x^2}{2}\right)' \log x dx + \frac{1}{2} - \frac{2}{e} + \frac{3}{2e^2}$$

$$= -\left[\frac{x^2}{2} \log x\right]_{\frac{1}{e}}^1 + \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{x}{2} dx + \frac{1}{2} - \frac{2}{e} + \frac{1}{e^2}$$

$$= \frac{-1}{2e^2} + \left[\frac{x^2}{4}\right]_{\frac{1}{e}}^1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{e} + \frac{1}{e^2}$$

$$= \frac{1}{4e^2} - \frac{2}{e} + \frac{3}{4}$$

