佐賀大学

2015 年 理工学部 第 1 問　　1 枚目／2 枚

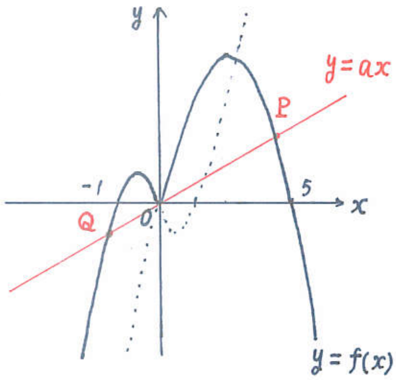
数理 石井K

1

$$f(x)=\begin{cases} x(5-x) & (x \geqq 0) \\ x(x^2-1) & (x<0) \end{cases}$$

とおき，関数 $y=f(x)$ のグラフを C とおく．直線 $y=ax$ と C は，原点 O およびそれ以外の 2 点 P，Q で交わっているものとする．ただし，点 P の x 座標は正，点 Q の x 座標は負であるとする．線分 OP と C によって囲まれる図形の面積を $S_1(a)$，線分 OQ と C によって囲まれる図形の面積を $S_2(a)$ とし，$S(a)=S_1(a)+S_2(a)$ とおく．このとき，次の問に答えよ．

(1) a の値の範囲を求めよ．
(2) $S_1(a)$ を a を用いて表せ．
(3) $S_2(a)$ を a を用いて表せ．
(4) (1) で求めた範囲を a が変化するとき，$S(a)$ の最小値を求めよ．



(1) $x(5-x)-ax=0 \iff x(5-x-a)=0$

$\iff x=0,\ 5-a$

P の x 座標は正より，$5-a>0$　$\therefore\ a<5$ …①

$x(x^2-1)-ax=0 \iff x(x^2-1-a)=0$

Q の x 座標は負より，$a+1>0$　$\therefore\ a>-1$ …②　← そのとき Q の x 座標は $-\sqrt{a+1}$ となる．

①，②より，$\underline{-1<a<5}$ //

(2) 右上のグラフより

$S_1(a)=\int_0^{5-a} x(5-x)-ax\ dx$

$=-\int_0^{5-a} x\{x-(5-a)\}\,dx$　↓ $\frac{1}{6}$ 公式

$=\underline{\frac{1}{6}(5-a)^3}$ //

(3) $S_2(a)=\int_{-\sqrt{a+1}}^{0} x(x^2-1)-ax\ dx$

$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{a+1}{2}x^2\right]_{-\sqrt{a+1}}^{0}$

$=-\left(\frac{(a+1)^2}{4}-\frac{(a+1)^2}{2}\right)$

$=\underline{\frac{1}{4}(a+1)^2}$ //

2 枚目へつづく

佐賀大学

2015 年 理工学部 第 1 問

2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$

$$f(x)=\begin{cases} x(5-x) & (x \geqq 0) \\ x(x^2-1) & (x<0) \end{cases}$$

とおき，関数 $y=f(x)$ のグラフを C とおく．直線 $y=ax$ と C は，原点 O およびそれ以外の 2 点 P，Q で交わっているものとする．ただし，点 P の x 座標は正，点 Q の x 座標は負であるとする．線分 OP と C によって囲まれる図形の面積を $S_1(a)$，線分 OQ と C によって囲まれる図形の面積を $S_2(a)$ とし，$S(a)=S_1(a)+S_2(a)$ とおく．このとき，次の問に答えよ．

(1) a の値の範囲を求めよ．
(2) $S_1(a)$ を a を用いて表せ．
(3) $S_2(a)$ を a を用いて表せ．
(4) (1) で求めた範囲を a が変化するとき，$S(a)$ の最小値を求めよ．

(4) (2), (3) より

$$S(a)=\frac{1}{6}(5-a)^3+\frac{1}{4}(a+1)^2$$

$$\therefore S'(a)=-\frac{1}{2}(5-a)^2+\frac{1}{2}(a+1)$$

$$=-\frac{1}{2}a^2+5a-\frac{25}{2}+\frac{a}{2}+\frac{1}{2}$$

$$=-\frac{1}{2}(a^2-11a+24)$$

$$=-\frac{1}{2}(a-3)(a-8)$$

$-1<a<5$ より増減表は次のようになる

a	(-1)	$\cdots$	3	$\cdots$	(5)	
$S'(a)$		$-$	0	$+$		
$S(a)$		$\searrow$		$\nearrow$		

$$S(3)=\frac{2^3}{6}+\frac{4^2}{4}=\frac{16}{3}$$

$\therefore$ 最小値 $\frac{16}{3}$ ($a=3$ のとき) //