



2013年工学部第4問

4  $\theta$ は実数とする. 行列  $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  について, 次の問いに答えよ.

(1) すべての自然数  $k$  に対して  $A^k = \begin{pmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}$  が成り立つことを, 数学的帰納法を用いて示せ.

(2)  $n$  は 2 以上の自然数とし,  $\theta = \frac{2\pi}{n}$  とする.  $B = A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$  とおくと,  $AB = B + E - A$  が成り立つことを示せ. ただし,  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  とする.

(3) (2) の条件のもとで,  $B = -E$  が成り立つことを示せ.