2015年 工学部 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 関数 $f(x)=x+x\sqrt{1-x^2}$ について以下の問いに答えよ.

(1) $f'(x)$ を求めよ.

(2) $y=f(x)$ のグラフの概形を描け. ただし変曲点は求めなくてよい.

(3) $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=x$ で囲まれた部分の面積を求めよ.

(1) $f'(x)=1+\sqrt{1-x^2}+x\cdot\frac{1}{2}\cdot(-2x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$=\dfrac{\sqrt{1-x^2}+1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ //

(2) (1)より $f'(x)=0$ となるのは, $\sqrt{1-x^2}=2x^2-1$ $(- \leqq x \leqq \ )$

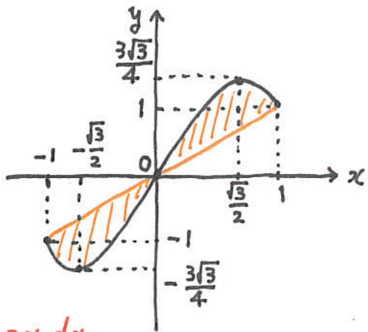
両辺を2乗して, $1-x^2=4x^4-4x^2+1$

$\therefore x^2(4x^2-3)=0$ $\therefore x=0,\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ 増減表は右のようになる

グラフは右下になる.

x	-1	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	1



(3) 図形は原点に関して対称なので

$S=2\int_0^1 x+x\sqrt{1-x^2}-x\,dx$

$=2\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$

$t=1-x^2$ とおいて置換積分 $\begin{array}{c|c} x & 0\to 1 \\ t & 1\to 0 \end{array}$, $dt=-2x\,dx$

$=\int_0^1\sqrt{t}\,dt$

$=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$

$=\frac{2}{3}$ //