2015年 工学部 第3問

3 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$a_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$
$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と定めるとき，次の問いに答えよ．ただし，対数は自然対数である．

(1) $a_1 = \log 2 - 1$ を示せ．

(2) $b_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ を示せ．

(3) $a_n = \log 2 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ を示せ．

(4) $x \geqq 0$ のとき $\dfrac{1}{1+x} \leqq 1$ であることを用いて，$|a_n| \leqq \dfrac{1}{n+1}$ を示せ．

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ を求めよ．

(1) $a_1 = (-1)\cdot\int_0^1 \frac{1+x-1}{1+x}\,dx$

$= -\int_0^1 1 - \frac{1}{1+x}\,dx$

$= -\left[x - \log|1+x|\right]_0^1$

$= \log 2 - 1$ ▨

(2) $b_n = a_{n+1} - a_n$

$= (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx - (-1)^n\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$

$= (-1)^{n+1}\left(\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx\right)$

$= (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x}\,dx$

$= (-1)^{n+1}\int_0^1 x^n\,dx$

$= (-1)^{n+1}\cdot\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

$= \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ ▨

(3) $n \geqq 2$ に対して，

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$

$= \log 2 - 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}$ （∵(1),(2)より）

$= \log 2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$

$= \log 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

これは，$n=1$ のときも成り立っている ▨

(4) $x \geqq 0$ のとき，$\frac{1}{1+x} \leqq 1$ より，

$|a_n| = \left|(-1)^n\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx\right|$

$= |(-1)^n|\cdot\left|\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx\right|$

$= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$

$\leqq \int_0^1 x^n\,dx$

$= \frac{1}{n+1}$ ▨

(5) (3),(4)より，$0 \leqq |a_n| = \left|\log 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right| \leqq \frac{1}{n+1}$

$n \to \infty$ のとき，$\frac{1}{n+1} \to 0$ とはさみうちの原理より，$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \underline{\log 2}$ //