



2011年 教育人間科学・生命環境（生命工以外）第2問

2 実数全体で定義された関数  $F(x)$  が次の条件①と②の両方を満たすとき「 $F(x)$ は性質(P)を持つ」ということにする.

① すべての実数  $x$  について  $F(x) > 0$  である.

②  $F(x)$  は何度でも微分が可能で  $\frac{d^2}{dx^2} \log F(x) = \frac{1}{\{F(x)\}^2}$  を満たす.

(1)  $y = f(x)$  が性質(P)を持つとき  $y''y - (y')^2 = 1$ ,  $y'''y - y''y' = 0$  となること, および  $\frac{y''}{y}$  は正の定数であることを示せ.

(2)  $y = f(x)$  は性質(P)を持つとする.  $\frac{y''}{y} = k^2$  ( $k$ は正の定数)とおくとき,  $k^2y^2 - (y')^2 = 1$ であることを示し, さらに  $ky - y' > 0$  および  $ky + y' > 0$  が成り立つことを示せ.

(3)  $c$  を実数とする. (2) のとき, 関数  $kf(c)y + \frac{1}{k}f'(c)y'$  も性質(P)を持つことを証明せよ. ただし①を示すために

$$kf(c)y + \frac{1}{k}f'(c)y' = f(c)(ky \mp y') \pm \frac{1}{k}y'(kf(c) \pm f'(c)) \quad (\text{複号同順})$$

を利用してよい.