山梨大学

2014年 教育人間科学・生命環境（生命工以外） 第3問

数理 石井K

3 整式 $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, … を次の式で定める.

$P_1(x)=x$, $P_2(x)=x^2+1$, $P_{n+2}(x)=2xP_{n+1}(x)+(1-x^2)P_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

(1) $P_3(x)$, $P_4(x)$ を求めよ.
(2) $P_n(1)$ を求めよ.
(3) $P_n(0)$ を求めよ.
(4) $P_n(2)$ を求めよ.

(1) $P_3(x) = 2xP_2(x) + (1-x^2)P_1(x)$
$= 2x(x^2+1) + (1-x^2)x$
$= \underline{x^3+3x}$ //

$P_4(x) = 2xP_3(x) + (1-x^2)P_2(x)$
$= 2x(x^3+3x) + (1-x^2)(x^2+1)$
$= \underline{x^4+6x^2+1}$ //

(2) $P_{n+2}(1) = 2P_{n+1}(1)$

∴ 数列 $\{P_n(1)\}$ は初項 $P_1(1)=1$, 公比2の等比数列

∴ $\underline{P_n(1) = 2^{n-1}}$ //

(3) $P_{n+2}(0) = P_n(0)$

∴ n：偶数のとき, $P_n(0) = P_{n-2}(0) = \cdots = P_2(0) = 1$

n：奇数のとき, $P_n(0) = P_{n-2}(0) = \cdots = P_1(0) = 0$

∴ $P_n(0) = \begin{cases} 1 & (n\text{：偶数のとき}) \\ 0 & (n\text{：奇数のとき}) \end{cases}$ //

(4) $P_{n+2}(2) = 4P_{n+1}(2) - 3P_n(2)$

∴ $P_{n+2}(2) - 3P_{n+1}(2) = P_{n+1}(2) - 3P_n(2) = \cdots = P_2(2) - 3P_1(2) = -1$

∴ $P_{n+1}(2) - 3P_n(2) = -1 \cdots ①$

$P_{n+2}(2) - P_{n+1}(2) = 3(P_{n+1}(2) - P_n(2)) = \cdots$

∴ 数列 $\{P_{n+1}(2) - P_n(2)\}$ は初項 $P_2(2) - P_1(2) = 3$, 公比3の等比数列

∴ $P_{n+1}(2) - P_n(2) = 3^n \cdots ②$ ②−①より, $\underline{P_n(2) = \frac{3^n+1}{2}}$ //