

お茶の水女子大学

2014年 化学・情報科学科（共通問題）第3問

3 次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $y = \frac{\log x}{x}$ ($x > 0$) の増減を調べ、そのグラフの概形を描け。ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ は証明なく用いて良い。
- (2) 異なる自然数 m, n の組で

$$m^n = n^m$$

を満たすものをすべて求めよ。

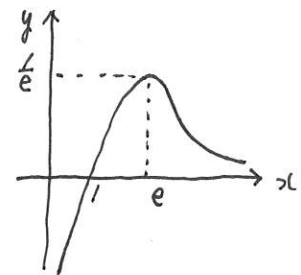
- (3) 曲線 $y = \frac{\log x}{x}$ と直線 $y = \frac{\log 2}{2}$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

$$(1) y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \log x}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

$\therefore y' = 0$ となるのは、 $x = e$ のとき。

また、 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{x} = -\infty$ であるから、左のグラフになる。

x	(0)	\dots	e	\dots	$(+\infty)$
y'		$+$	0	$-$	
y	$(-\infty)$	\nearrow	$\frac{1}{e}$	\searrow	(0)



- (2) 両辺自然対数をとると、 $\frac{\log m}{m} = \frac{\log n}{n}$

\therefore (1) のグラフより、 $m < n$ とすると、

$$1 < m < e \quad (m: \text{自然数より}) \quad m = 2$$

このとき、 $n = 4$ とすると、 $2^4 = 4^2$ となり条件をみたしている。

(1) のグラフより、これ以外の n は考えられない $\therefore (m, n) = (2, 4), (4, 2)$

- (3) (2) より、曲線と直線の交点は $(2, \frac{\log 2}{2})$ と $(4, \frac{\log 2}{2})$

$$\begin{aligned} \therefore S &= \int_2^4 \frac{\log x}{x} - \frac{\log 2}{2} dx \\ &= \int_2^4 \frac{\log x}{x} dx - \frac{\log 2}{2} \times 2 \quad \dots (*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_2^4 \frac{\log x}{x} dx = \int_2^4 (\log x)' \cdot \log x dx \\ &= [(\log x)^2]_2^4 - \int_2^4 \frac{1}{x} \log x dx \quad \therefore 2I = (\log 4)^2 - (\log 2)^2 \end{aligned}$$

(*) に代入して、 $S = \frac{3}{2} (\log 2)^2 - \log 2$

