2014年 薬学部（B日程）第4問

$\boxed{4}$ x, y は正の値をとる変数で，$x+y=a$（a は定数）を満たす．$z=\log_2\dfrac{1}{x}+\log_{\frac{1}{2}}y$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) z を x と y の積 xy を用いて表せ．

(2) z の最小値を a を用いて表せ．

(3) $x+y=a$ を満たす全ての正の数 x, y に対して，$z>0$ であるとき，a のとり得る値の範囲を求めよ．

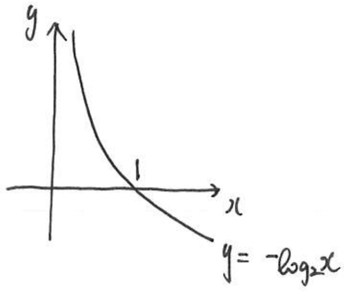
(1) 底の変換公式より．

$$z=\log_2\frac{1}{x}+\frac{\log_2 y}{\log_2\frac{1}{2}}$$

$$=\log_2\frac{1}{x}-\log_2 y$$

$$=\log_2\frac{1}{xy}$$

$$=\underline{-\log_2 xy}$$



(2) (1)より．$z=-\log_2 x(a-x)$

z が最小 $\iff$ $x(a-x)$ が最大

$\therefore\ x(a-x)=-x^2+ax$

$$=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}$$

$\therefore$ z の最小値は $z=-\log_2\dfrac{a^2}{4}$

$$=\underline{2-2\log_2 a}$$

$\left(x=y=\dfrac{a}{2}\ のとき\right)$

(3) (2)より．$2-2\log_2 a>0$

$\therefore\ \log_2 a<1$

$\therefore\ \underline{0<a<2}$