愛媛大学

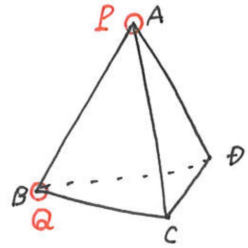
2014年 医学部 第1問

$\boxed{1}$ n を 0 以上の整数とする．点 P，Q は，1 辺の長さが 1 である正四面体 ABCD の頂点の上を，以下の条件 (a)，(b) を満たしながら移動する．

(a) 時刻 $t=0$ において，点 P は頂点 A に，点 Q は頂点 B にいる．

(b) 時刻 $t=n+1$ において，点 P と点 Q は各々，時刻 $t=n$ のときにいた頂点から，他の 3 つの頂点のいずれかに，それぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で移動する．

時刻 $t=n$ における点 P と点 Q の間の距離を d_n とおく．d_n の値は 0 または 1 である．時刻 $t=n$ において $d_n=1$ となる確率を p_n とする．



(1) 時刻 $t=1$ とする．

(i) 点 P が頂点 C にいるとき，$d_1=1$ となる点 Q の位置は何通りか．

(ii) 点 P が頂点 B にいるとき，$d_1=1$ となる点 Q の位置は何通りか．

(2) p_1 を求めよ．

(3) $d_1+d_2=1$ となる確率を求めよ．

(4) p_{n+1} を p_n で表し，p_n を求めよ．

(1) (i) B にはとどまれない．また，C にあると $d_1=0$ となるので．

$\{A, D\}$ の $\underline{2通り}$ //

(ii) $\{A, C, D\}$ の $\underline{3通り}$ //

(2) $d_1=1$ となる P, Q の位置を (P, Q) で表すと，(1) より．

$(P, Q)=(B, A), (B, C), (B, D), (C, A), (C, D), (D, A), (D, C)$

の 7 通り　よって $\dfrac{7}{3^2}=\underline{\dfrac{7}{9}}$ //

(3) (i) $d_1=1,\ d_2=0$ の場合．図形の対称性より．$\dfrac{7}{9}\times\left(1-\dfrac{7}{9}\right)=\dfrac{14}{81}$

(ii) $d_1=0,\ d_2=1$ の場合．$\dfrac{2}{9}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{27}$

(i), (ii) より．$\dfrac{14}{81}+\dfrac{4}{27}=\underline{\dfrac{26}{81}}$ //

(4) $T=n$ において異なる頂点にいれば $d_{n+1}=1$ となるのは $\dfrac{7}{9}$

〃　同じ　〃　$\dfrac{2}{3}$

$\therefore p_{n+1}=p_n\cdot\dfrac{7}{9}+(1-p_n)\cdot\dfrac{2}{3}$　　$\therefore \underline{p_{n+1}=\dfrac{1}{9}p_n+\dfrac{2}{3}}$ //

$\therefore p_{n+1}-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{9}\left(p_n-\dfrac{3}{4}\right)$　$\therefore$ 数列 $\left\{p_n-\dfrac{3}{4}\right\}$ は初項 $\dfrac{7}{9}-\dfrac{3}{4}$，公比 $\dfrac{1}{9}$ の等比数列なので，

$p_n-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{36}\cdot\left(\dfrac{1}{9}\right)^{n-1}$

$\therefore \underline{p_n=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{9}\right)^n}$ //