



2014年 医学部 第1問

1 自然数 n に対して, $f_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{(t^2+1)^n}$ とおく. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $f_1(1)$ を求めよ.

(2) $g(x) = f_1\left(\frac{1}{x}\right)$ とおく. $g'(x)$ を求め, $x > 0$ のとき

$$f_1(x) + g(x) = \frac{\pi}{2}$$

が成り立つことを示せ.

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} f_1(x)$ を求めよ.

(4) 部分積分法を用いて,

$$f_n(x) = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2nf_n(x) - 2nf_{n+1}(x)$$

が成り立つことを示せ.

(5) $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{2^{n-3} C_{n-1}}{2^{2n-2}} \pi$ ($n \geq 2$)であることを示せ. ただし, ${}_m C_k = \frac{m!}{(m-k)!k!}$ とする.