東京理科大学

2014年 基礎工 第5問

5 座標平面上の曲線 $y = x^2$ 上に2点 A$(-1,\ 1)$，B$(3,\ 9)$ をとり，t を実数として，点 P$(t,\ t^2)$ をとる．$f(t) = \overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$ とおく．ただし，$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$ は2つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の内積を表している．さらに，$t \neq -1,\ 3$ のとき，2つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ のなす角を θ とおく．ただし，$0 \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

(1) $t = 0$ のときの $\cos\theta$ の値を求めよ．

(2) $f(t)$ は t の4次式となる．それを降べきの順に整理して書け．

(3) $f(t)$ は

$$f(t) = (t + m)(t + n)(t^2 + at + b)$$ （ただし，$m,\ n,\ a,\ b$ は整数）

の形に書ける．$f(t)$ をこの形に書き表せ．

(4) $-1 < t < 3$ の範囲内で，$\theta = 90^\circ$ となるときの t の値を求めよ．

(5) 左側からの極限 $\lim_{t \to 3-0} \cos\theta$ の値を求めよ．