

2016年医学部第3問

3 関数  $y = \tan x$  は、区間  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$  で単調増加である。したがって、この区間で逆関数を作ることが出来る。それを

$$y = \phi(x) \quad (-\infty < x < \infty)$$

と書く（この逆関数を  $\text{Arctan } x$  と書く参考書もある）。正確を期すために、 $-\frac{\pi}{2} < \phi(x) < \frac{\pi}{2}$  としておく。以下の問いに答えよ。ただし、「 $-\infty < x < \infty$ 」は「 $x$  は実数」という意味である。

(1) 関数  $f(x)$  を

$$f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \{ \phi(\sqrt{2}x + 1) + \phi(\sqrt{2}x - 1) \}$$

とおく。  $f(x)$  の導関数  $f'(x)$  を求めよ。

(2) 積分

$$\int_0^1 \frac{1}{x^4 + 1} dx$$

を求めたい。正確な値は求められないので、以下のようにする。即ち、関数  $G(x)$  で

$$\int_0^1 \frac{1}{x^4 + 1} dx = G(\sqrt{2} + 1)$$

となる関数を求めよ。

(3) 積分の等式

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^4 x} dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos^4 x} dx$$

を示せ。

(4) 積分

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^4 x} dx$$

を求めよ。