北里大学

2014年 医学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ a は $0<a<e$ を満たす定数とする．曲線 $y=\log x$ 上の点 A$(a,\ \log a)$ における接線を ℓ，法線を m とおく．以下の問に答えよ．必要ならば $e=\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}$ で，$2.718<e<2.719$ であることを用いてよい．

(1) 接線 ℓ の方程式を a を用いて表せ．

(2) 接線 ℓ が x 軸と交わる点を P，y 軸と交わる点を Q とし，原点を O とする．三角形 OPQ の面積を $S(a)$ とおくとき，$S(a)$ を a を用いて表せ．

(3) a が $0<a<e$ の範囲を動くとき，(2) の $S(a)$ を最大にする a の値と $S(a)$ の最大値を求めよ．

(4) a が $0<a<e$ の範囲を動くとき，法線 m が点 $(e,\ 0)$ を通るような a の値の個数はただ 1 個であることを示せ．

(1) $y'=\frac{1}{x}$ より $\ell : y=\frac{1}{a}(x-a)+\log a$ $\quad\therefore\ \underline{\ell : y=\frac{1}{a}x-1+\log a}$ //

(2) $0=\frac{1}{a}x-1+\log a$ より $x=a(1-\log a)$ $\quad\therefore\ P(a(1-\log a),\ 0)$

$Q(0,\ \log a-1)$

$\therefore\ S(a)=\frac{1}{2}|a(1-\log a)(\log a-1)|$ $\quad 0<a<e$ より，$\log a<1$

$\therefore\ \underline{S(a)=\frac{1}{2}a(1-\log a)^2}$ //

(3) $S'(a)=\frac{1}{2}(1-\log a)^2+\frac{1}{2}a\cdot 2(1-\log a)\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)$

$=-\frac{1}{2}(1+\log a)(1-\log a)$

$\therefore\ S'(a)=0$ となるのは，$0<a<e$ において $a=\frac{1}{e}$

a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	(e)
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$	

$\therefore$ 右の増減表より $S(a)$ の最大値は $\underline{\frac{2}{e}\ \left(a=\frac{1}{e}\text{ のとき}\right)}$ //

(4) $m : y=-a(x-a)+\log a$ $\quad\therefore\ m : y=-ax+a^2+\log a$

これが $(e,0)$ を通るので，$0=-ae+a^2+\log a$

$f(a)=-ae+a^2+\log a$ とおくと，

$\frac{1}{a}>0,\ 2a>0$ より，

$f'(a)=-e+2a+\frac{1}{a}$ $\quad$ 相加・相乗平均の関係より $2a+\frac{1}{a}\geqq 2\sqrt{2a\cdot\frac{1}{a}}=2\sqrt{2}$

$\therefore\ f'(a)\geqq 2\sqrt{2}-e\geqq 2.8-2.719>0$ $\quad\therefore\ f(a)$：単調増加 また $f(1)=1-e<0$

$f(e)=1>0$ より，$f(a)=0$ となる a の個数は1個 ▨