名古屋市立大学

2015年 医学部 第4問

$\boxed{4}$ 空間内の点O，A_1，A_2，B，Cを考える．このとき，ベクトル$\overrightarrow{OA_1}$，$\overrightarrow{OA_2}$はともに長さが1で，角度θ $\left(0<\theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$をなす．また点BはO，$A_1$，$A_2$を含む平面H上に存在せず，ベクトル$\overrightarrow{OB}$は，$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OB}=c_1$，$\overrightarrow{OA_2}\cdot\overrightarrow{OB}=c_2$を満たす（ただし$c_1$，$c_2$はいずれも0でない実数であるとする）．さらにベクトル$\overrightarrow{OC}$は，$\overrightarrow{OC}=c_1\overrightarrow{OA_1}+c_2\overrightarrow{OA_2}$のように表され，かつベクトル$\overrightarrow{CB}$と垂直である．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 角度θを求めよ．

(2) $|\overrightarrow{OB}|^2>{c_1}^2+{c_2}^2$が成り立つことを示せ．ただし，$|\overrightarrow{OB}|$はベクトル$\overrightarrow{OB}$の長さを表す．

(3) $c_1=c_2=c$，$|\overrightarrow{OB}|=b$とする．また，$\overrightarrow{OD_1}=c\overrightarrow{OA_1}$，$\overrightarrow{OD_2}=c\overrightarrow{OA_2}$となるように，空間上に点$D_1$，$D_2$を与える．四面体$D_1D_2CB$の体積を，$b$，$c$を用いて表せ．

(4) (3)の条件の下で3点D_1，D_2，Bにより定まる平面に対し，点Cから垂線を引いたとき，垂線と平面の交点をTとする．このとき，CTの長さをb，cで表せ．