

2014年医学部第4問

4 n を 4 以上の整数とする. 1 番から n 番までの番号がふられたボールが 1 つずつある. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 以下のような操作でボールを 1 列に並べる:

(i) 1 番のボールを適当な位置におく.

(ii) 2 番のボールを 1 番のボールの左または右に同じ確率でおく.

(iii) 3 番のボールをすでに並んでいる 2 つのボールの左または間または右に同じ確率でおく.

(iv) 以下 n 番まで番号順に, k 番のボールを, すでに並んでいるボールの一番左または間または一番右に同じ確率でおく, ことを繰り返す.

例えば, 左から 2 番, 1 番, 3 番のボールが並んでいるとき, 4 番のボールが 2 番と 1 番の間におかれる確率は $\frac{1}{4}$ である.

n 番のボールをおき終えたとき, i 番のボールが左から j 番目に並ぶ確率は $\frac{1}{n}$ であることを証明せよ. ただし, i と j は 1 以上, n 以下の整数とする.

(2) (1) のボールの列を, (左から) 番号順に並び替えるため, 以下の操作を考える:

隣り合った 2 つのボールの組で, 左のボールの番号が右のそれより大きなもの (入れ替え可能な組と呼ぶ) が存在するとき, そのようなボールの組を 1 つ選び, 入れ替える.

入れ替え可能な組が複数あった場合に, 入れ替える組をどのように選んだとしても, この操作を繰り返すことにより, すべてのボールの列は, 必ず番号順の列になることを証明せよ.

(3) (2) の操作の回数は, 入れ替える組の選び方とは無関係であることを証明せよ.

(4) (2) においてボールの列を番号順に並べ替えるとき, i 番のボールを, より番号の小さいボールと入れ替える回数の期待値を E_i とする. このとき,

$$\sum_{i=1}^n E_i$$

を求めよ.