0002241908577999

横浜市立大学

2016年 国際総合学部 第1問

数理 石井K

1 n を $n \geqq 2$ である整数とするとき，以下の各問に答えよ．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \tan x\,dx$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\tan^n x}{\sin x}$ の導関数を求めよ．

(3) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{\tan^{n-2} x}{\cos^2 x}\,dx$ を求めよ．

(4) 式

$$\int \tan^n x\,dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x\,dx$$

が成り立つことを証明せよ．

(5) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x\,dx$ を求めよ．

(1)
$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$
$$= -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx$$
$$= \underline{-\log|\cos x| + C} \quad //$$
(Cは積分定数)

(2)
$$\left(\frac{\tan^n x}{\sin x}\right)' = \frac{(\tan^n x)'\sin x - \tan^n x\cdot\cos x}{\sin^2 x}$$
$$= \frac{n\tan^{n-1} x\cdot\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \tan^{n-1} x\cdot\sin x}{\sin^2 x}$$
$$= \frac{n\tan^n x - \tan^{n-1} x\cdot\sin x\cos x}{\sin^2 x\cos x}$$
$$= \underline{\frac{n\tan^n x}{\sin^2 x\cos x} - \frac{\tan^{n-1} x}{\sin x}} \quad //$$

(注)
答えの表し方は何通りもある

(3)
$$\int \frac{\tan^{n-2} x}{\cos^2 x}\,dx = \underline{\frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x + C \ (\text{Cは積分定数})} \quad //$$

(4)
$$\int \tan^n x\,dx = \int \tan^2 x\cdot\tan^{n-2} x\,dx$$
$$= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\cdot\tan^{n-2} x\,dx$$
$$= \int \frac{\tan^{n-2} x}{\cos^2 x}\,dx - \int \tan^{n-2} x\,dx$$
$$= \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x\,dx \quad (\because (3)\text{より}) \quad ▨$$

(5) (4)より

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x\,dx = \left[\frac{1}{2}\tan^2 x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx$$
$$= \frac{1}{2} - \Big[-\log|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} \quad (\because (1)\text{より})$$
$$= \frac{1}{2} + \log\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= \underline{\frac{1}{2}(1-\log 2)} \quad //$$