

2017年 医・国際総合科学 第3問

3 投げたとき、表の出る確率が p 、裏の出る確率が $1-p$ であるコインがある。ただし、 p は $0 < p < 1$ をみたす実数である。A 君と B 君はこのコインを使って以下のような公平な勝負をすることを思いついた。

- コインを 2 回投げる。
- 始めに表、次に裏が出たら A 君の勝ちとする。
- 始めに裏、次に表が出たら B 君の勝ちとする。
- それ以外だった場合、始めからやり直す。

以下の問いに答えよ。

- (1) 自然数 n に対して、コインをちょうど $2n$ 回投げて A 君が勝つ確率と、コインをちょうど $2n$ 回投げて B 君が勝つ確率は等しいことを証明せよ。
- (2) A 君と B 君のどちらかが勝つまでにコインを投げる回数が $2n$ 回以下である確率を求めよ。
- (3) (2) で求めた確率は p が $\frac{1}{2}$ のとき最大になることを証明せよ。
- (4) x を $0 < x < 1$ をみたす実数とする。このとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nx^n = 0$$

を証明せよ。

- (5) コインをちょうど $2n$ 回投げたときに勝負がつく確率を a_n とする。このとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2ia_i$$

を求めよ。