

2013年 国際総合学部 第2問

2 n 個のボールと、1から n までの番号がふられた n 個の空の箱がある。また、1から n の番号が書かれた n 枚のカードが袋の中に入っている。いま、以下の手順に従いボールを箱の中に入れていくことを考える。

手順1 袋からカードを1枚無作為に取り出して、手順2に進む。

手順2 手順1で取り出したカードに書かれている番号の箱が、

- 空ならば、そこにボールを1つ入れて、手順3へ進む。
- 空でなければ、カードを袋に戻さず手元に置き、手順1に戻る。

手順3 手元のすべてのカードを袋に戻す。この時点で、

- すべての箱にボールが入っていれば終了する。
- 空の箱が1つでもあれば、手順1に戻る。

また、 $1 \leq k \leq n$ を満たす自然数 k について、 $k-1$ 個目のボールを箱に入れ終わった状態（ただし、 $k=1$ のときは、はじめの状態とする）の後に、

- 次のボール、すなわち k 個目のボールを箱に入れるまでにちょうど i 枚のカードを袋から取り出す確率を $P_k(i)$ とし、
- i 枚のカードを袋から取り出してもまだ次のボールを箱に入れることができない確率を $Q_k(i)$ とする。ただし、 $Q_k(0) = 1$ とする。

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $n=4$ のとき $P_3(1)$, $P_3(2)$, $Q_3(2)$ をそれぞれ求めよ。
- (2) $Q_k(i)$ を $P_k(i+1)$, $P_k(i+2)$, \dots , $P_k(k)$ を用いて表せ。ただし、 $0 \leq i \leq k-1$ とする。
- (3) $k-1$ 個目のボールを箱に入れてから k 個目のボールを箱に入れるまでに袋から取り出すカードの枚数の期待値 E_k は $Q_k(0) + Q_k(1) + \dots + Q_k(k-1)$ であることを示せ。
- (4) 不等式

$$E_k \leq \frac{n}{n-k+1}$$

が成り立つことを示せ。

- (5) 不等式

$$E_1 + E_2 + \dots + E_n \leq n + n \log n$$

が成り立つことを示せ。