2016年 経済 第2問　　1枚目／2枚

2 実数 a, b に対し，関数

$$f(x)=x^4+2ax^3+(a^2+1)x^2-a^3+a+b$$

がただ1つの極値をもち，その極値が0以上になるとする．次の問いに答えよ．

(1) a, b のみたす条件を求めよ．

(2) a, b が (1) の条件をみたすとき，$a-2b$ の最大値を求めよ．

(1) $f'(x)=4x^3+6ax^2+2(a^2+1)x$

$=2\{2x^3+3ax^2+(a^2+1)x\}$

$=2x(2x^2+3ax+a^2+1)$

$2x^2+3ax+a^2+1=0$ …① は $x=0$ を解にもたないので

$f(x)$ がただ1つの極値をもつのは，① が実数解をもたない場合と重解をもつ場合

① の判別式を D とすると，$D=9a^2-4\cdot 2(a^2+1)=a^2-8$

(i) $D<0$ すなわち $-2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}$ のとき

増減表は右のようになる．

x	…	0	…
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘		↗

極小

∴ 極値が0以上より，$f(0)=-a^3+a+b\geqq 0$

$\therefore\ b\geqq a^3-a\ (-2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2})$

(ii) $D=0$ すなわち $a=\pm 2\sqrt{2}$ のとき

$a=-2\sqrt{2}$ のとき，① の解は $x=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (重解)

$a=2\sqrt{2}$ のとき，① の解は $x=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (重解)

右の増減表より，いずれの場合も

x	…	0	…	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	…
$f'(x)$	−	0	+	0	+
$f(x)$	↘		↗		↗

極小

↑ $a=-2\sqrt{2}$ のとき

x	…	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	…	0	…
$f'(x)$	−	0	−	0	+
$f(x)$	↘		↘		↗

極小

↑ $a=2\sqrt{2}$ のとき

極小値は $f(0)=-a^3+a+b\geqq 0$

$\therefore\ b\geqq a^3-a\ (a=\pm 2\sqrt{2})$

(i), (ii) より，まとめると，

$b\geqq a^3-a\ (-2\sqrt{2}\leqq a\leqq 2\sqrt{2})$ //

2016年 経済 第2問　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ 実数 a, b に対し，関数

$$f(x) = x^4 + 2ax^3 + (a^2+1)x^2 - a^3 + a + b$$

がただ1つの極値をもち，その極値が0以上になるとする．次の問いに答えよ．

(1) a, b のみたす条件を求めよ．

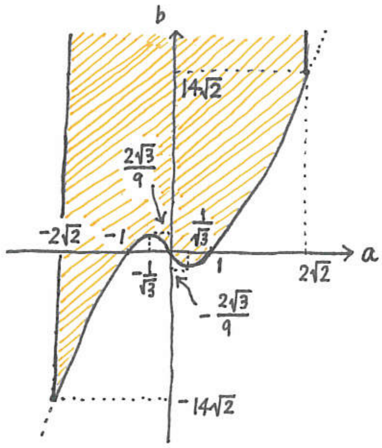
(2) a, b が (1) の条件をみたすとき，$a - 2b$ の最大値を求めよ．

(2) $b = a^3 - a$ より，

$b' = 3a^2 - 1$

$= 3\left(a + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(a - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

a	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$2\sqrt{2}$
b'		$+$	0	$-$	0	$+$	
b	$-14\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	$14\sqrt{2}$



∴ (1)で求めた条件を図示すると右のようになる．

ただし境界線も含む

$a - 2b = k$ とおくと，$b = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}k$　これを直線 l とする．

∴ k が最大となる可能性があるのは，次の2つの場合

(i) l が点 $(-2\sqrt{2}, -14\sqrt{2})$ を通るとき，

$-2\sqrt{2} - 2\cdot(-14\sqrt{2}) = k$ より，$k = 26\sqrt{2}$

(ii) l が $b = a^3 - a$ に接するとき，

$b' = 3a^2 - 1$ より，$3a^2 - 1 = \frac{1}{2}$　∴ $a^2 = \frac{1}{2}$　よって $a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

これより，接点は $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ と $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

接点を l が通ることから，$k = \pm\sqrt{2}$

(i), (ii) より，

$a - 2b$ の最大値は $26\sqrt{2}$ ($a = -2\sqrt{2}$, $b = -14\sqrt{2}$ のとき)