

2014年工・情報科学・社シス科学第4問

4 xy 平面上に放物線 $C: y = \frac{1}{4}x^2 + 4$ と点 $P(p, 0)$ がある。ただし、 $p \geq 0$ とする。 C 上の点 $(p, \frac{1}{4}p^2 + 4)$ における C の接線を ℓ とし、 ℓ に関して、 P と対称な点を $Q(X, Y)$ とするとき、次の問いに答えよ。

(1) $p = 0$ のとき、 $Q(0, \text{ア})$ である。

(2) ℓ の方程式は $y = \frac{\text{ハ}}{\text{イ}}x - \frac{\text{ウ}}{\text{エ}}p^2 + \text{オ}$ である。線分 PQ の中点が ℓ 上にあることから

$$Y = \frac{\text{ハ}}{\text{イ}}X + \text{キ} \quad \dots\dots(*)$$

が成り立つ。

(3) $p > 0$ のとき、 Q が、 P を通り ℓ と直交する直線上にあることから

$$Y = \frac{\text{ケ}}{p}X + \text{コ} \quad \dots\dots(**)$$

が成り立つ。(*)と(**)から p を消去することにより

$$X^2 + Y^2 - \text{サシ}Y + \text{スセ} = 0$$

が成り立つことがわかる。

(4) X の最小値は ソタ であり、このとき $p = \text{チ}$ である。 p が 0 から チ まで変化するとき、線分 PQ が通過する部分の面積は $\frac{\text{ツ}}{\text{テ}}\pi + \frac{\text{トナ}}{\text{ニ}}$ である。