2011 年 第 4 問　1枚目／2枚

数理 石井K

4　次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{x\{1+(\log x)^2\}}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^\pi x^2\cos nx\,dx$　(nは自然数)

(3) $\displaystyle\int_0^1 \cos m\pi x\,\cos n\pi x\,dx$　($m,\ n$は0以上の整数)

(1) $t=\log x$ とおくと，$dt=\frac{1}{x}\cdot dx$　$\begin{array}{c|c} x & 1\to e \\ \hline t & 0\to 1\end{array}$

$$\therefore (与式)=\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t}{1+t^2}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\log(1+t^2)\Big]_0^1$$

$$=\underline{\frac{1}{2}\log 2}\ //$$

(2) $$(与式)=\int_0^\pi x^2\cdot\left(\frac{1}{n}\sin nx\right)'dx$$

$$=\left[x^2\cdot\frac{1}{n}\cdot\sin nx\right]_0^\pi-\int_0^\pi\frac{2x}{n}\sin nx\,dx$$

$$=-\frac{2}{n}\int_0^\pi x\cdot\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)'dx$$

$$=-\frac{2}{n}\left[-\frac{x}{n}\cos nx\right]_0^\pi+\frac{2}{n}\int_0^\pi-\frac{1}{n}\cos nx\,dx$$

$$=\frac{2\pi}{n^2}\cos n\pi-\frac{2}{n^2}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^\pi$$

$$=\frac{2\pi}{n^2}\cos n\pi$$

$$\therefore \begin{cases} n：偶数のとき．\ \dfrac{2\pi}{n^2} \\ n：奇数のとき．\ \underline{-\dfrac{2\pi}{n^2}}\ // \end{cases}$$

$\left((-1)^n\cdot\frac{2\pi}{n^2}\ でもよい\right)$

0000204725979999

岡山県立大学

2011年 第4問　2枚目/2枚

数理 石井K

4 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{x\{1+(\log x)^2\}}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^\pi x^2\cos nx\,dx$　（nは自然数）

(3) $\displaystyle\int_0^1 \cos m\pi x\ \cos n\pi x\,dx$　（m，nは0以上の整数）

$$\begin{array}{rl} & \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \\ + & \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \\ \hline & \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta \end{array}$$

和・積の公式

(3) 右上の和・積の公式に，$\alpha=m\pi x$，$\beta=n\pi x$ を代入すると，

$$\cos m\pi x\cos n\pi x=\frac{1}{2}\{\cos(m+n)\pi x+\cos(m-n)\pi x\}$$

$$\therefore(与式)=\int_0^1\frac{1}{2}\{\cos(m+n)\pi x+\cos(m-n)\pi x\}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\cos(m+n)\pi x\,dx+\frac{1}{2}\int_0^1\cos(m-n)\pi x\,dx$$

(i) $m=n=0$ のとき　$(与式)=\int_0^1 dx=1$

(ii) $m=n\neq0$ のとき．$(与式)=\frac{1}{2}\int_0^1\cos 2m\pi x\,dx+\frac{1}{2}\int_0^1 dx$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2m\pi}\sin 2m\pi x\right]_0^1+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}$$

(iii) $m\neq n$ のとき．$(与式)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(m+n)\pi}\sin(m+n)\pi x\right]_0^1+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(m-n)\pi}\sin(m-n)\pi x\right]_0^1$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(m+n)\pi}\cdot\sin(m+n)\pi+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(m-n)\pi}\cdot\sin(m-n)\pi$$

$$=0$$

$$\therefore(与式)=\begin{cases}1 & (m=n=0\text{ のとき})\\ \frac{1}{2} & (m=n\neq0\text{ のとき})\\ 0 & (m\neq n\text{ のとき})\end{cases}$$

//