00017858141289999

信州大学

2014年 第3問

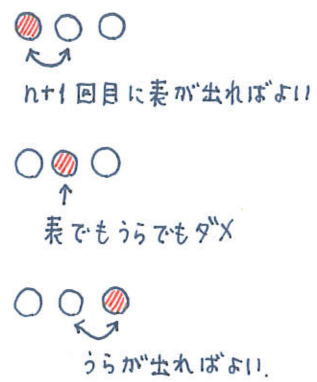
数理 石井K

$\boxed{3}$ 3個の玉が横に一列に並んでいる．コインを1回投げて，それが表であれば，そのときに中央にある玉とその左にある玉とを入れ替える．また，それが裏であれば，そのときに中央にある玉とその右にある玉とを入れ替える．この操作を繰り返す．

(1) 最初に中央にあったものが n 回後に中央にある確率を求めよ．

(2) 最初に右端にあったものが n 回後に右端にある確率を求めよ．

(1) 最初に中央にあったものが n 回後に中央にある確率を P_n とおくと．



$$P_{n+1} = \underbrace{(1-P_n)\times\frac{1}{2}}$$

中央になければ $n+1$ 回目には $\frac{1}{2}$ で中央にくる．

$\therefore\ P_{n+1}-\frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(P_n-\frac{1}{3}\right)$

$\therefore$ 数列 $\left\{P_n-\frac{1}{3}\right\}$ は初項 $P_1-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$，公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列

$\therefore\ P_n-\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore\ \underline{P_n = \frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}$ //

(2) 最初に右端にあったものが n 回後に右端にある確率，中央にある確率をそれぞれ g_n，r_n とおくと．左端にある確率は．$1-g_n-r_n$ となる．

$$\begin{cases} g_{n+1} = \frac{1}{2}g_n+\frac{1}{2}r_n & \cdots ① \\ r_{n+1} = \frac{1}{2}g_n+\frac{1}{2}(1-g_n-r_n) \iff r_{n+1} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}r_n & \cdots ② \end{cases}$$

②より．$r_{n+1}-\frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(r_n-\frac{1}{3}\right)$

$\therefore$ 数列 $\left\{r_n-\frac{1}{3}\right\}$ は初項 $r_1-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$，公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列

$\therefore\ r_n = \frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

これを①に代入して．式変形すると．

$$g_{n+1}-\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(g_n-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \iff \frac{g_{n+1}-\frac{1}{3}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}} = -\frac{g_n-\frac{1}{3}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}+\frac{1}{3}$$

$\therefore\ S_n = \dfrac{g_n-\frac{1}{3}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$ とおくと．$S_{n+1}-\frac{1}{6} = -\left(S_n-\frac{1}{6}\right)$ $\therefore \left\{S_n-\frac{1}{6}\right\}$ は初項 $\underbrace{-2\left(g_1-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{6}}_{=-\frac{1}{2}}$，公比 -1 の等比数列 $\therefore\ S_n = \frac{1}{6}-\frac{1}{2}(-1)^{n-1}$

$\therefore\ \underline{g_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\frac{1}{3}}$ //