甲南大学

2013年 理系2 第3問

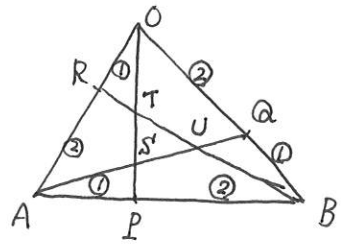
数理 石井K

$\boxed{3}$ △OABにおいて，辺ABを1：2に内分する点をP，辺BOを1：2に内分する点をQ，辺OAを1：2に内分する点をRとし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{AQ}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ．

(2) AQとOPの交わる点をSとするとき，$\overrightarrow{AS}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ．

(3) AQとBRの交わる点をTとし，BRとOPの交わる点をUとするとき，△STUと△OABの面積の比の値$\dfrac{\triangle STU}{\triangle OAB}$を求めよ．



(1) $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA}$

$=\underline{-\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}}$ //

(2) A，S，Qは一直線上にあるので，

$\overrightarrow{AS}=k\overrightarrow{AQ}$と表せる　∴ $\overrightarrow{AS}=-k\vec{a}+\frac{2}{3}k\vec{b}$ …(＊)

このとき，$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AS}=(1-k)\vec{a}+\frac{2}{3}k\vec{b}$ …①

$\overrightarrow{OS}=l\overrightarrow{OP}$と表せるので　$\overrightarrow{OS}=\frac{2}{3}l\vec{a}+\frac{1}{3}l\vec{b}$ …②

$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$より①，②から，$1-k=\frac{2}{3}l$，$\frac{2}{3}k=\frac{1}{3}l$

∴ $1-k=\frac{4}{3}k$　∴ $\frac{7}{3}k=1$　∴ $k=\frac{3}{7}$

(＊)に代入して，$\underline{\overrightarrow{AS}=-\frac{3}{7}\vec{a}+\frac{2}{7}\vec{b}}$ //

(3) (2)より $l=\frac{6}{7}$　∴ $\overrightarrow{OS}=\frac{6}{7}\overrightarrow{OP}$　よって OS：SP＝6：1

∴ $\triangle OAS=\frac{1}{3}\times\frac{6}{7}\times\triangle OAB$　∴ $OAS=\frac{2}{7}\triangle OAB$

同様にして，$\triangle ABU=\triangle BOT=\frac{2}{7}\triangle OAB$

∴ $\triangle STU=\triangle OAB-\triangle OAS-\triangle ABU-\triangle BOT=\frac{1}{7}\triangle OAB$

∴ $\dfrac{\triangle STU}{\triangle OAB}=\underline{\frac{1}{7}}$ //