富山県立大学

2015年 工学部 第4問

$\boxed{4}$ 関数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $y=f(x)$ の極値および変曲点を調べて，そのグラフの概形をかけ．

(2) α，β は定数で，$-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ とする．このとき，定積分 $\displaystyle\int_{\tan\alpha}^{\tan\beta} f(x)\,dx$ を α，β を用いて表せ．

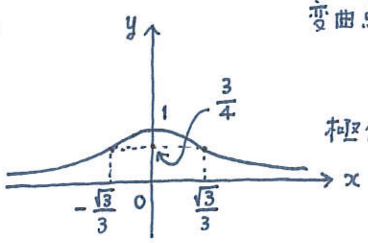
(3) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{3+4\cos^2 t}\,dt$ を求めよ．

(1) $f'(x)=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$ ，$f''(x)=\dfrac{-2(1+x^2)^2+2x\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4}=\dfrac{6\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{(1+x^2)^3}$

$\therefore$ $f'(x)=0$ となるのは．$x=0$ ，$f''(x)=0$ となるのは．$x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore$ 増減表は右のようになり，グラフは下のようになる

$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$



変曲点は $\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{3}{4}\right)$

極値は $f(0)=1$

x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{3}{4}$	↗	1	↘	$\frac{3}{4}$	↘

(2) $x=\tan t$ とおいて置換積分する．$dx=\dfrac{dt}{\cos^2 t}$ ，

x	$\tan\alpha \to \tan\beta$
t	$\alpha \to \beta$

$$(与式)=\int_\alpha^\beta \frac{1}{1+\tan^2 t}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}\,dt$$

$$=\int_\alpha^\beta dt$$

$$=\big[t\big]_\alpha^\beta$$

$$=\underline{\beta-\alpha}\ /\!/$$

(3) $\cos t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ とおいて置換積分する．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}dx=-\sin t\,dt$ ，

t	$\frac{\pi}{3}\to\frac{\pi}{2}$
x	$\frac{1}{\sqrt{3}}\to 0$

$$(与式)=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{0}\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{3+4\cdot\frac{3}{4}x^2}\,dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=\underline{\frac{\sqrt{3}}{36}\pi}\ /\!/$$ （(2)の結果を使った）