名古屋市立大学

2014年 医学部 第4問

数理 石井K

4 $x \geqq 0$ で定義される関数 $f(x) = xe^{\frac{x}{2}}$ について次の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) $f(x)$ の第1次導関数を $f'(x)$，第2次導関数を $f''(x)$ とする．$f'(2)$，$f''(2)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ の逆関数を $g(x)$，$g(x)$ の第1次導関数を $g'(x)$，第2次導関数を $g''(x)$ とする．$g'(2e)$，$g''(2e)$ を求めよ．

(1) $f'(x) = e^{\frac{x}{2}} + x \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{x}{2}} = \left(\frac{x}{2} + 1\right) e^{\frac{x}{2}}$　　$\therefore \underline{f'(2) = 2e}$ //

$f''(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} + \left(\frac{x}{2} + 1\right) \cdot \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} = \left(\frac{x}{4} + 1\right) e^{\frac{x}{2}}$　　$\therefore \underline{f''(2) = \frac{3}{2}e}$ //

(2) $g(f(x)) = x$ の両辺を x で微分して，

ポイント

$f(x)$ の逆関数が $g(x)$ であるから

$g(f(x)) = x$ となる．

$g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$ $\cdots$ ①

$x = 2$ を代入すると，$f(2) = 2e$，$f'(2) = 2e$ より，

$\underline{g'(2e) = \frac{1}{2e}}$ //

① の両辺を x で微分して，

$g''(f(x)) \cdot \{f'(x)\}^2 + g'(f(x)) \cdot f''(x) = 0$

$x = 2$ を代入して

$g''(2e) \cdot 4e^2 + g'(2e) \cdot \frac{3}{2}e = 0$

$\therefore g''(2e) \cdot 4e^2 = -\frac{3}{2}e \cdot \frac{1}{2e}$

$\therefore \underline{g''(2e) = -\frac{3}{16e^2}}$ //