2011 年 医学部 第 1 問

$\boxed{1}$ 以下の問いに答えよ．

(1) 関数

$$f(x) = x\sin^2 x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

の最大値を与える x を α とするとき，$f(\alpha)$ を α の分数式で表すと $\boxed{1}$ となる．

(2) 多項式

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2$$

を因数分解すると $\boxed{2}$ となる．

(3) N を与えられた自然数とし，$f(x)$ および $g(x)$ を区間 $(-\infty,\ \infty)$ で N 回以上微分可能な関数とする．$f(x)$ と $g(x)$ から定まる関数を次のように定義する．t を与えられた実数として，

$$\begin{aligned}(f *_t g)(x) &= \sum_{k=0}^{N} \frac{t^k}{2^k k!} f^{(k)}(x) g^{(k)}(x) \\ &= f(x)g(x) + \frac{t}{2} f'(x)g'(x) + \cdots + \frac{t^N}{2^N N!} f^{(N)}(x) g^{(N)}(x)\end{aligned}$$

とおく．ここに，$f^{(k)}(x)$ は $f(x)$ の第 k 次導関数である（$g^{(k)}(x)$ も同様である）．a を実数，n を N 以下の自然数とする．$f(x) = e^{2ax}$，$g(x) = x^n$ にたいし，二項定理を用いて $(f *_t g)(x)$ を計算すると $\boxed{3}$ となる．

(4) 関係式

$$f(x) + \int_0^x f(t)e^{x-t}\,dt = \sin x$$

をみたす微分可能な関数 $f(x)$ を考える．$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めると，$f'(x) = \boxed{4}$ となる．$f(0) = \boxed{5}$ であるから $f(x) = \boxed{6}$ となる．