



2012年理系第5問

5 次の問いに答えよ.

(1) 実数 $x \geq 0$ に対して, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$x - \frac{1}{2}x^2 \leq \log(1+x) \leq x$$

(2) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} \log(1+x) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定めるとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

(3) 数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \sum_{k=1}^n \log\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定めるとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ.