

2015年 経済学部 第3問

3 実数 θ は $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ を満たすとする. $O(0, 0, 0)$ を原点とする座標空間の3点

$$A(\cos^2 \theta, \sin \theta, 1 + \sin^2 \theta), \quad B(\sin \theta, 0, -\sin \theta), \quad C(1, \cos 2\theta - \cos^2 \theta, 1)$$

に対し, それぞれ $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおく.

(1) \vec{b} は零ベクトルではないとする. 4点 O, A, B, C が同一平面上にあるならば,

$$\theta = \frac{\boxed{27} \boxed{28}}{\boxed{29}} \pi \text{ である.}$$

次に $\theta = \frac{\pi}{6}$ とし, 以下このときの3点 A, B, C を考える. また, 3点 O, B, C の定める平面を α とする.

(2) 点 P は α 上の点で, $|\overrightarrow{AP}|$ が最小になるものとする. このとき,

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{b} = \boxed{30}, \quad \overrightarrow{AP} \cdot \vec{c} = \boxed{31}$$

が成り立つ. また, \overrightarrow{OP} を \vec{b}, \vec{c} を用いて表すと

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\boxed{32} \boxed{33}}{\boxed{34}} \vec{b} + \frac{\boxed{35} \boxed{36}}{\boxed{37} \boxed{38}} \vec{c}$$

となる. ただし, \vec{u}, \vec{v} はベクトル \vec{u} と \vec{v} の内積を表す.

(3) 三角形 OBC の面積は $\frac{1}{8} \sqrt{\frac{\boxed{39} \boxed{40}}{\boxed{41}}}$ であり, $|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{\frac{\boxed{42}}{\boxed{43} \boxed{44}}}$ なので, 四面体 $OABC$

の体積は $\frac{\boxed{45}}{\boxed{46}}$ となる.