横浜国立大学

2015 年 経済 第 1 問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 大小 2 つのさいころを投げ，大きいさいころの出た目を a，小さいさいころの出た目を b とする．a，b に対し，xy 平面上の曲線 $y=x^3-ax$ を C とし，C を x 軸の正の方向に b だけ平行移動した曲線を D とする．次の問いに答えよ．

(1) C と D が異なる 2 点で交わる確率を求めよ．

(2) C と D が異なる 2 点で交わり，かつ，その 2 点を通る直線の傾きが正である確率を求めよ．

(1) $C: y=x^3-ax$ ，$D: y=(x-b)^3-a(x-b)$ より．

$x^3-ax-(x-b)^3+a(x-b)=0$ が異なる2つの実数解をもつ

$\Leftrightarrow$ $3bx^2-3b^2x+b^3-ab=0$ が異なる2つの実数解をもつ

…(*)

∴ 判別式を D_1 とおくと，$D_1=9b^4-4\cdot 3b(b^3-ab)>0$

∴ $3b^2(4a-b^2)>0$ 　ここで $b>0$ より　$4a>b^2$ …①

a，b はさいころの目なので ①をみたすのは．

$(a,b)=(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),$
$(4,3),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(6,1),(6,2),(6,3)$
$(6,4)$ の 17通り

∴ $\dfrac{17}{6^2}=\underline{\dfrac{17}{36}}$ //

(2) 交点の座標を $(\alpha,\alpha^3-a\alpha)$，$(\beta,\beta^3-a\beta)$ とおくと $(\alpha<\beta)$

この2点を通る直線の傾きは．$\dfrac{\alpha^3-a\alpha-\beta^3+a\beta}{\alpha-\beta}=\dfrac{(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-a(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}$

$=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta-a$

(1) の (*) と解と係数の関係より，

$\alpha+\beta=b$ ，$\alpha\beta=\dfrac{b^2-a}{3}$

∴ (傾き) $=b^2-\dfrac{b^2-a}{3}-a>0$ 　∴ $b^2>a$

(1) の (a,b) の中でこれをみたすのは，$(a,b)=(2,2),(3,2),(3,3),(4,3)$
$(5,3),(5,4),(6,3),(6,4)$

の8通り ∴ $\dfrac{8}{6^2}=\underline{\dfrac{2}{9}}$ //