0002317272867999

大阪工業大学

2016年 工学部 第2問

数理石井K

2 次の空所を埋めよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 3a_n + 2^n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を満たすとき，$a_2 =$ $\boxed{\text{ア}}$ 8，$a_3 =$ $\boxed{\text{イ}}$ 28 である．また，漸化式を変形すると，$a_{n+1} + 2^{n+1} = 3(a_n +$ $\boxed{\text{ウ}}$ 2^n $)$ となることから，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n =$ $\boxed{\text{エ}}$ である．$4\cdot 3^{n-1} - 2^n$

(2) $t > 0$ とし，k を実数とする．原点を O とする座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\mathrm{B}(t, -t)$ について，$\mathrm{AB} = 2\sqrt{2}$ であるとする．このとき，$t =$ $\boxed{\text{オ}}$ である．さらに，直線 OA 上の点 $\mathrm{P}(k, k)$ を中心とする円 C が 2 点 A，B を通るとき，$k =$ $\boxed{\text{カ}}$ であり，円 C の半径 r は，$r =$ $\boxed{\text{キ}}$ である．

$-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　$\dfrac{\sqrt{14}}{2}$　4

(1) $a_{n+1} = 3a_n + 2^n$ に $n=1$ を代入して，$a_2 = 3a_1 + 2 = 8$

$n=2$ を代入して，$a_3 = 3a_2 + 4 = 28$

$\therefore\ \underline{a_2 = 8,\ a_3 = 28}$ //

$a_{n+1} = 3a_n + 2^n$ の両辺に 2^{n+1} を加えて，

$a_{n+1} + 2^{n+1} = 3a_n + 2^n + \underbrace{2\cdot 2^n}_{=2^{n+1}}$

よって，$a_{n+1} + 2^{n+1} = 3a_n + 3\cdot 2^n$

$\underline{a_{n+1} + 2^{n+1} = 3(a_n + 2^n)}$ //

$\therefore$ 数列 $\{a_n + 2^n\}$ は初項 $a_1 + 2 = 4$，公比 3 の等比数列

$\therefore\ a_n + 2^n = 4\cdot 3^{n-1}$

$\therefore\ \underline{a_n = 4\cdot 3^{n-1} - 2^n}$ //

(2) $\mathrm{AB} = 2\sqrt{2}$ より $\mathrm{AB}^2 = 8$

$\therefore\ \left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 8$　　$\therefore\ 2t^2 = 7$

$t > 0$ より，$\underline{t = \dfrac{\sqrt{14}}{2}}$ //

$\mathrm{P}(k, k)$ を中心とする半径 $r\ (>0)$ の円の方程式は $(x-k)^2 + (y-k)^2 = r^2$

これが A，B を通るから，$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - k\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - k\right)^2 = r^2 \iff 2k^2 - 2\sqrt{2}k + 1 = r^2$ …①

$(t-k)^2 + (-t-k)^2 = r^2 \iff 2k^2 + 7 = r^2$ …② $\left(\because t = \frac{\sqrt{14}}{2}\text{ より}\right)$

①，② を解いて，$\underline{k = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\ r = 4}$ //