



2016年工・理・教育第4問

4  $n$ を自然数とする。このとき、次の問いに答えなさい。

(1)  $\alpha, \beta$ を実数とし、

$$f(x) = \frac{\alpha}{x-\alpha} - \frac{\beta}{x-\beta}$$

とする。 $f(x)$ の第 $n$ 次導関数 $f^{(n)}(x)$ について、次の等式が成り立つことを、数学的帰納法によって証明しなさい。

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left\{ \frac{\alpha}{(x-\alpha)^{n+1}} - \frac{\beta}{(x-\beta)^{n+1}} \right\}$$

(2)  $b, c$ を $b^2 > 4c$ を満たす実数とし、

$$h(x) = \frac{x}{x^2 - bx + c}$$

とする。また、 $h(x)$ の第 $n$ 次導関数 $h^{(n)}(x)$ に対し、 $a_n = \frac{c^n h^{(n)}(0)}{n!}$ とおく。

(i) 2次方程式 $x^2 - bx + c = 0$ の解を $\alpha, \beta$ とする。 $a_n$ を $\alpha, \beta, n$ を用いて表しなさい。

(ii)  $a_{n+2} - ba_{n+1} + ca_n = 0$ が成り立つことを示しなさい。