

1 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = 4, \quad a_{n+1} = \frac{(3n+4)a_n - 9n - 6}{(n+1)a_n - 3n - 1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たす.

- (1) すべての自然数 n に対し, $a_n > 3$ であることを示せ.
- (2) $b_n = \frac{1}{a_n - 3}$ とおく. b_{n+1} を b_n と n の式で表せ.
- (3) (2) で定めた数列 $\{b_n\}$ に対し $c_n = b_{n+1} - b_n$ とおく. 数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ.
- (4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(名古屋工業大学 2016)

2016年工学部第2問

1枚目/2枚

2 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = 4, \quad a_{n+1} = \frac{(3n+4)a_n - 9n - 6}{(n+1)a_n - 3n - 1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たす.

- (1) すべての自然数 n に対し, $a_n > 3$ であることを示せ.
 (2) $b_n = \frac{1}{a_n - 3}$ とおく. b_{n+1} を b_n と n の式で表せ.
 (3) (2) で定めた数列 $\{b_n\}$ に対し $c_n = b_{n+1} - b_n$ とおく. 数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ.
 (4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

$$\begin{aligned} \text{(1) 漸化式より, } a_{n+1} - 3 &= \frac{(3n+4)a_n - 9n - 6 - 3\{(n+1)a_n - 3n - 1\}}{(n+1)a_n - 3n - 1} \\ &= \frac{a_n - 3}{(n+1)a_n - 3n - 1} \\ &= \frac{a_n - 3}{n(a_n - 3) + a_n - 1} \quad \dots (*) \end{aligned}$$

数学的帰納法により, $a_n > 3$ ($n = 1, 2, \dots$) を示す.(i) $n = 1$ のとき

$$a_1 = 4 > 3 \quad \therefore n = 1 \text{ のときは成り立つ}$$

(ii) $n = k$ のとき成り立つと仮定すると, $a_k > 3$ であるから (*) より, $a_{k+1} - 3 > 0$

$$\therefore a_{k+1} > 3 \text{ となり, } n = k+1 \text{ のときも成り立つ}$$

(i), (ii) より, すべての自然数 n に対し, $a_n > 3$ である \square

(2) (1) より, (*) の両辺は正であるから, 逆数をとって,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{n+1} - 3} &= \frac{n(a_n - 3) + a_n - 1}{a_n - 3} \\ &= n + \frac{a_n - 3 + 2}{a_n - 3} \\ &= n + 1 + \frac{2}{a_n - 3} \end{aligned}$$

$$\therefore \underline{b_{n+1} = 2b_n + n + 1} \quad \dots \textcircled{1}$$

(3) ① より, $b_{n+2} = 2b_{n+1} + n + 2 \quad \dots \textcircled{2}$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{ より, } b_{n+2} - b_{n+1} = 2(b_{n+1} - b_n) + 1$$

$$\therefore c_{n+1} = 2c_n + 1$$

2016年 工学部 第2問

2枚目 / 2枚


2 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = 4, \quad a_{n+1} = \frac{(3n+4)a_n - 9n - 6}{(n+1)a_n - 3n - 1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たす.

- (1) すべての自然数 n に対し, $a_n > 3$ であることを示せ.
 (2) $b_n = \frac{1}{a_n - 3}$ とおく. b_{n+1} を b_n と n の式で表せ.
 (3) (2) で定めた数列 $\{b_n\}$ に対し $c_n = b_{n+1} - b_n$ とおく. 数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ.
 (4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(3) のつづき

$$c_{n+1} + 1 = 2(c_n + 1)$$

$\therefore \{c_n + 1\}$ は初項 $b_2 - b_1 + 1 = b_1 + 3 = 4$, 公比 2 の等比数列

$$\therefore c_n + 1 = 4 \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore c_n = 2^{n+1} - 1$$

$$(4) \quad b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \quad (n \geq 2)$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2^{k+1} - 1)$$

$$= 1 + \frac{4(1-2^{n-1})}{1-2} - (n-1)$$

$$= 1 + 4(2^{n-1} - 1) - n + 1$$

$$= 2^{n+1} - n - 2$$

これは $n=1$ のときも成り立っている

$$\therefore b_n = 2^{n+1} - n - 2 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\therefore \frac{1}{a_n - 3} = 2^{n+1} - n - 2$$

$$a_n - 3 = \frac{1}{2^{n+1} - n - 2}$$

$$a_n = 3 + \frac{1}{2^{n+1} - n - 2}$$