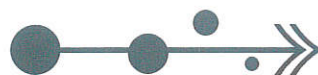


1 i を虚数単位とする. 複素数 z が等式 $|iz + 3| = |2z - 6|$ を満たすとき, 次の問いに答えよ.

- (1) この等式を満たす点 z 全体は, どのような図形を表すか答えよ.
- (2) $z - \bar{z} = 0$ を満たす z を求めよ.
- (3) $|z + i|$ の最大値を求めよ.

(秋田大学 2016)



2016年 医学部 第1問

1 i を虚数単位とする。複素数 z が等式 $|iz + 3| = |2z - 6|$ を満たすとき、次の問いに答えよ。

- (1) この等式を満たす点 z 全体は、どのような図形を表すか答えよ。
 (2) $z - \bar{z} = 0$ を満たす z を求めよ。
 (3) $|z + i|$ の最大値を求めよ。

$$\begin{aligned} (1) \text{ (与式)} &\Leftrightarrow |i(z-3i)| = 2|z-3| \\ &\Leftrightarrow |i| \cdot |z-3i| = 2|z-3| \\ &\Leftrightarrow |z-3i| = 2|z-3| \end{aligned}$$

$$\text{よって, } |z-3i|^2 = 4|z-3|^2$$

$$(z-3i)(\bar{z}-3\bar{i}) = 4(z-3)(\bar{z}-3)$$

$$(z-3i)(\bar{z}+3i) = 4(z-3)(\bar{z}-3)$$

$$|z|^2 + 3iz - 3i\bar{z} + 9 = 4(|z|^2 - 3z - 3\bar{z} + 9)$$

$$\therefore 3|z|^2 - 12z - 12\bar{z} - 3iz + 3i\bar{z} + 27 = 0$$

$$|z|^2 - 4z - 4\bar{z} - iz + i\bar{z} + 9 = 0$$

$$(z - (4-i))(\bar{z} - (4+i)) = 8$$

$$\therefore (z - (4-i))(\overline{z - (4-i)}) = 8$$

$$|z - (4-i)|^2 = 8$$

$$\therefore |z - (4-i)| = 2\sqrt{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

\therefore 点 z 全体は、中心 $4-i$, 半径 $2\sqrt{2}$ の円を表す

$$(2) z - \bar{z} = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z}$$

$$\Leftrightarrow z \text{ は実数}$$

$$\textcircled{1} \text{ より, } |(z-4) + i| = 2\sqrt{2}$$

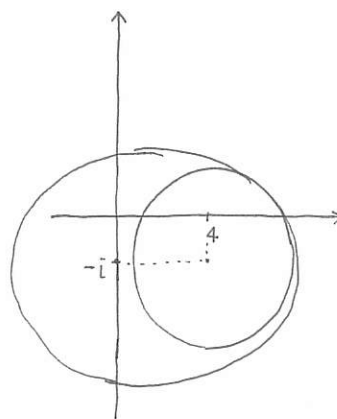
$$\therefore (z-4)^2 + 1 = 8$$

$$(z-4)^2 = 7$$

$$\therefore \underline{z = 4 \pm \sqrt{7}}$$

$$(3) |z+i| = R \quad (R \text{ は正の実数}) \text{ とおくと,}$$

これは、中心 $-i$, 半径 R の円を表す



(1) の円と上図のように接するとき、 R が最大となるので、

$$R - 2\sqrt{2} = 4$$

$$\therefore \underline{R = 4 + 2\sqrt{2}}$$