______ 年　番号 ______　氏名 ______________________________

$\boxed{1}$ i を虚数単位とするとき，次の各問に答えよ．

(1) 複素数 $c = 1 + i$ について，c と共役な複素数 $\overline{c}$ および $|c|^2$ をそれぞれ求めよ．

(2) 複素数 z が $|z| = 1$ を満たすとする．このとき，$z + \dfrac{1}{z}$ が実数であることを証明せよ．

(3) α，β を複素数として α の実部と虚部がともに正であるとする．また，$|\alpha| = |\beta| = 1$ とする．複素数 $i\alpha$，$\dfrac{i}{\alpha}$，β で表される複素数平面上の 3 点が，ある正三角形の 3 頂点であるとき，α，β をそれぞれ求めよ．

（静岡大学　2016）

$\boxed{2}$ $z = \cos\dfrac{2\pi}{7} + i\sin\dfrac{2\pi}{7}$（$i$ は虚数単位）とおく．

(1) $z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$ を求めよ．

(2) $\alpha = z + z^2 + z^4$ とするとき，$\alpha + \overline{\alpha}$，$\alpha\overline{\alpha}$ および α を求めよ．ただし，$\overline{\alpha}$ は α の共役複素数である．

(3) $(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)$ を求めよ．

（千葉大学　2016）

0002207092977999

静岡大学

2016年理（物・化）・工・情報第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ iを虚数単位とするとき，次の各問に答えよ．

(1) 複素数$c = 1 + i$について，cと共役な複素数$\overline{c}$および$|c|^2$をそれぞれ求めよ．

(2) 複素数zが$|z| = 1$を満たすとする．このとき，$z + \dfrac{1}{z}$が実数であることを証明せよ．

(3) α，βを複素数としてαの実部と虚部がともに正であるとする．また，$|\alpha| = |\beta| = 1$とする．複素数$i\alpha$，$\dfrac{i}{\alpha}$，βで表される複素数平面上の3点が，ある正三角形の3頂点であるとき，α，βをそれぞれ求めよ．

(1) $\underline{\overline{c} = 1 - i,\ |c|^2 = 2}$ //

(2) $|z| = 1$より，$z = \cos\theta + i\sin\theta$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$と表せる．

$z + \dfrac{1}{z} = \cos\theta + i\sin\theta + (\cos\theta + i\sin\theta)^{-1}$

ド・モアブル

$= \cos\theta + i\sin\theta + \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$

$= \cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta - i\sin\theta$

$= 2\cos\theta$ （実数） ▨

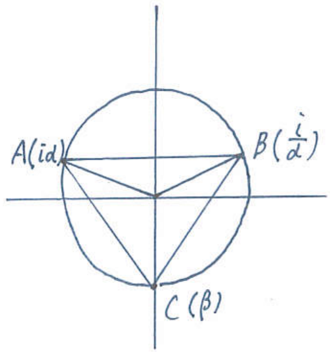
(3) αは実部が正，虚部が正，$|\alpha| = 1$より，$\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$ $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$と表せる．

このとき，$i\alpha = \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) + i\sin(\theta + \frac{\pi}{2})$，$\dfrac{i}{\alpha} = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) + i\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$

$A(i\alpha)$，$B(\frac{i}{\alpha})$，$C(\beta)$とすると，$|i\alpha| = |\frac{i}{\alpha}| = |\beta| = 1$であるから

正三角形ABCは単位円に内接する．原点をOとすると，

$\angle AOB = (\theta + \frac{\pi}{2}) - (\frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{2\pi}{3}$ であるから，$\theta = \frac{\pi}{3}$



よって，$i\alpha = \cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$\dfrac{i}{\alpha} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$\alpha = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\therefore \beta = i\alpha \cdot (\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi)$

$= (-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$

$= -i$

$\therefore$ $\underline{\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \beta = -i}$ //

2016年 理学部（数学・情報数理）第3問　　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{3}$ $z=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$（$i$は虚数単位）とおく．

(1) $z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$ を求めよ．

(2) $\alpha=z+z^2+z^4$ とするとき，$\alpha+\overline{\alpha}$，$\alpha\overline{\alpha}$ および α を求めよ．ただし，$\overline{\alpha}$ は α の共役複素数である．

(3) $(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)$ を求めよ．

(1) $z^7=\left(\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}\right)^7$　ド・モアブル

$=\cos 2\pi+i\sin 2\pi$

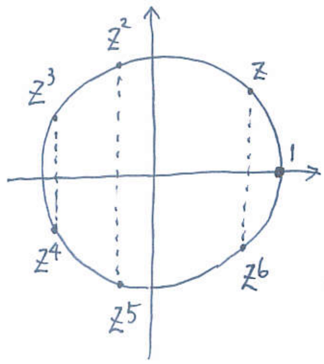
$=1$

$\therefore z^7-1=0$

$(z-1)(z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)=0$

$z\neq 1$ より．$z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$

$\therefore z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=\underline{-1}$ //



(2) $\overline{z}=z^6$，$\overline{z^2}=z^5$，$\overline{z^3}=z^4$，より．

$\alpha+\overline{\alpha}=z+z^2+z^4+\overline{z}+\overline{z^2}+\overline{z^4}$

$=z+z^2+z^4+z^6+z^5+z^3$

$=\underline{-1}$ //

$\alpha\overline{\alpha}=(z+z^2+z^4)(z^3+z^5+z^6)$

$=z^4+z^6+z^7+z^5+z^7+z^8+z^7+z^9+z^{10}$　$z^7=1$ より

$=z^4+z^6+1+z^5+1+z+1+z^2+z^3$

$=z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6+3$

$=-1+3$

$=\underline{2}$ //

解と係数の関係より．$\alpha,\overline{\alpha}$ は $x^2+x+2=0$ の解であるから，$x=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$

虚部が大きい方が α であるから，$\underline{\alpha=\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}}$ //

2枚目へつづく

0002237452677999

千葉大学

2016年 理学部（数学・情報数理）第3問　　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{3}$ $z=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}$（$i$は虚数単位）とおく．

(1) $z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$ を求めよ．

(2) $\alpha=z+z^2+z^4$ とするとき，$\alpha+\overline{\alpha}$，$\alpha\overline{\alpha}$ および α を求めよ．ただし，$\overline{\alpha}$ は α の共役複素数である．

(3) $(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)$ を求めよ．

(3) $1, z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6$

は方程式 $x^7=1$ の解であるから．

$$(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)=(x-1)(x-z)(x-z^2)(x-z^3)(x-z^4)(x-z^5)\cdot(x-z^6)$$

両辺 $(x-1)$ でわって．

$$x^6+x^5+\cdots+x+1=(x-z)(x-z^2)\cdots(x-z^6)$$

$x=1$ を代入して．

$$(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)=\underline{7}$$ //