$\boxed{1}$ 数列 $\{a_n\}$ は

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{2} - \dfrac{a_n}{n+1} \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots) \end{cases}$$

で定められているとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 4つの有理数 p, q, r, s が

$$p + q\sqrt{2} = r + s\sqrt{2}$$

を満たすとする．このとき，$p = r$ かつ $q = s$ であることを示せ．ただし，$\sqrt{2}$ が無理数であることは用いてよい．

(2) 不等式

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\sqrt{2} < a_n < \sqrt{2}$$

が成立することと，$a_n = p_n + q_n\sqrt{2}$ (p_n および q_n は有理数）と表されることを n に関する数学的帰納法を用いて示せ．

(3) (2) で定義された数列 $\{p_n\}$ に対して，p_{n+1} と p_n が満たす関係式，および一般項 p_n を求めよ．

$\boxed{2}$ 数列 $\{a_n\}$ は，

$$a_1 = 2, \quad (n+1)a_{n+1} - 3(n+2)a_n = 2n^2 + 6n + 4 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定められているとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $b_n = \dfrac{a_n}{n+1}$ とおくとき，b_{n+1} と b_n の関係式を求めよ．

(2) b_n を n を用いて表せ．

(3) a_n を n を用いて表せ．

$\boxed{3}$ 数列 $\{a_n\}$ は，

$$a_1=2,\quad (n+1)a_{n+1}-3(n+2)a_n=2n^2+6n+4 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定められているとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $b_n=\dfrac{a_n}{n+1}$ とおくとき，b_{n+1} と b_n の関係式を求めよ．

(2) b_n を n を用いて表せ．

(3) a_n を n を用いて表せ．

$\boxed{4}$ 数列 $\{a_n\}$ は次を満たす．

$$a_1=3,\quad a_{n+1}=\frac{4-a_n}{a_n-1} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $a_n=b_n+2$ とおく．b_{n+1} を b_n で表せ．

(2) $b_n=\dfrac{1}{c_n}$ とおく．数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．