＿＿＿年　番号＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ a を正の実数とし，数列 $\{a_n\}$ を次で定義する．

$$a_1 = a,\quad a_{n+1} = 1 + \frac{2}{a_n}\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，次の問いに答えよ．

(1) a_2，a_3，a_4 をそれぞれ分子と分母が a の整式となっている分数式で表せ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = (-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n$ により定めるとき，b_1，b_2，b_3，b_4 をそれぞれ a を用いて表せ．

(3) b_{n+1} と b_n を用いて b_{n+2} を表せ．

(4) 数列 $\{c_n\}$ を $c_n = b_{n+1} - b_n$ により定めるとき，n と a を用いて c_n を表せ．

(5) $a = 1$ のとき，b_n を n を用いて表せ．また，a_n を n を用いて表せ．

（立教大学　2016）

$\boxed{2}$ θ を実数とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1,\quad a_2 = \cos\theta,\quad a_{n+2} = \frac{3}{2}a_{n+1} - a_n$$

により定める．すべての n について $a_n = \cos(n-1)\theta$ が成り立つとき，$\cos\theta$ を求めよ．

（一橋大学　2016）

2016年 全学部日程 第2問

数理 石井K

2 a を正の実数とし，数列 $\{a_n\}$ を次で定義する．

$$a_1=a,\quad a_{n+1}=1+\frac{2}{a_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，次の問いに答えよ．

(1) a_2，a_3，a_4 をそれぞれ分子と分母が a の整式となっている分数式で表せ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n=(-1)^n a_1a_2\cdots a_n$ により定めるとき，b_1，b_2，b_3，b_4 をそれぞれ a を用いて表せ．

(3) b_{n+1} と b_n を用いて b_{n+2} を表せ．

(4) 数列 $\{c_n\}$ を $c_n=b_{n+1}-b_n$ により定めるとき，n と a を用いて c_n を表せ．

(5) $a=1$ のとき，b_n を n を用いて表せ．また，a_n を n を用いて表せ．

(1) $a_2=1+\frac{2}{a}=\frac{a+2}{a}$，$a_3=1+2\cdot\frac{a}{a+2}=\frac{3a+2}{a+2}$，$a_4=1+2\cdot\frac{a+2}{3a+2}=\frac{5a+6}{3a+2}$

$\therefore\ \underline{a_2=\frac{a+2}{a},\ a_3=\frac{3a+2}{a+2},\ a_4=\frac{5a+6}{3a+2}}$ //

(2) $b_1=-a_1=-a$，$b_2=a_1a_2=a+2$，$b_3=-a_1a_2a_3=-3a-2$，$b_4=a_1a_2a_3a_4=5a+6$

$\therefore\ \underline{b_1=-a,\ b_2=a+2,\ b_3=-3a-2,\ b_4=5a+6}$ //

(3)
$$\begin{aligned}b_{n+2}&=(-1)^{n+2}a_1a_2\cdots a_n a_{n+1}a_{n+2}\\&=(-1)^{n+2}a_1a_2\cdots a_n a_{n+1}\left(1+\frac{2}{a_{n+1}}\right)\\&=-(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_na_{n+1}+2\cdot(-1)^n a_1a_2\cdots a_n\\&=\underline{-b_{n+1}+2b_n}\end{aligned}$$ //

(4) (3)より，$b_{n+2}-b_{n+1}=-2(b_{n+1}-b_n)$

$\therefore\ c_{n+1}=-2c_n$

$\therefore$ 数列 $\{c_n\}$ は初項 $b_2-b_1=2a+2$，公比 -2 の等比数列

$\therefore\ c_n=(2a+2)\cdot(-2)^{n-1}$ $\qquad\therefore\ \underline{c_n=-(a+1)\cdot(-2)^n}$ //

(5) $a=1$ のとき，$c_n=(-2)^{n+1}$

$\therefore\ n\geqq2$ のとき，$b_n=-1+\sum_{k=1}^{n-1}(-2)^{k+1}=\frac{1}{3}-\frac{4}{3}(-2)^{n-1}=\underline{\frac{1}{3}\{1-(-2)^{n+1}\}}$ // これは $n=1$ のときも成り立っている．

$n\geqq2$ のとき，$\frac{b_n}{b_{n-1}}=\frac{(-1)^n a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n}{(-1)^{n-1}a_1a_2\cdots a_{n-1}}=-a_n$ より $a_n=-\frac{\frac{1}{3}\{1-(-2)^{n+1}\}}{\frac{1}{3}\{1-(-2)^n\}}$

$\therefore\ \underline{a_n=-\frac{1-(-2)^{n+1}}{1-(-2)^n}}$ // これは $n=1$ のときも成り立っている．

0002184725187999

一橋大学

2016年 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ θを実数とし，数列$\{a_n\}$を

$$a_1 = 1,\quad a_2 = \cos\theta,\quad a_{n+2} = \frac{3}{2}a_{n+1} - a_n$$

により定める．すべてのnについて$a_n = \cos(n-1)\theta$が成り立つとき，$\cos\theta$を求めよ．

漸化式より，$a_3 = \frac{3}{2}a_2 - a_1 = \frac{3}{2}\cos\theta - 1$

一方，$a_3 = \cos 2\theta$ より，$\cos 2\theta = \frac{3}{2}\cos\theta - 1$ …(*) であることが必要

(*) と $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ より，$\frac{1}{2}\cos\theta(4\cos\theta - 3) = 0$

$\therefore$ $\cos\theta = 0,\ \frac{3}{4}$ であることが必要

同様に，a_4を考えることにより，$\frac{3}{2}a_3 - a_2 = \cos 3\theta$

$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ より，$\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\cos\theta - 1\right) - \cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$\therefore$ $4\cos^3\theta - \frac{17}{4}\cos\theta + \frac{3}{2} = 0$

$\cos\theta = 0$ のときはこれをみたさず，$\cos\theta = \frac{3}{4}$ のときはみたす．

以上より，$\cos\theta = \frac{3}{4}$ が必要で，十分性は数学的帰納法で示す．

(i) $n = 1, 2$ のとき

$a_1 = 1$，$a_2 = \cos\theta = \frac{3}{4}$ であるから，$a_n = \cos(n-1)\theta$ は成り立っている．

(ii) $n = k, k+1$ のとき成り立つと仮定すると，

$a_k = \cos(k-1)\theta$，$a_{k+1} = \cos k\theta$

$$\begin{aligned}
a_{k+2} &= \frac{3}{2}a_{k+1} - a_k \\
&= \frac{3}{2}\cos k\theta - \cos(k-1)\theta \\
&= \frac{3}{2}\cos\{(k+1)\theta - \theta\} - \cos\{(k+1)\theta - 2\theta\} \\
&= \frac{3}{2}\{\cos(k+1)\theta\underbrace{\cos\theta}_{=\frac{3}{4}} + \sin(k+1)\theta\sin\theta\} - \cos(k+1)\theta\cos 2\theta - \sin(k+1)\theta\sin 2\theta \\
&= \frac{9}{8}\cos(k+1)\theta + \frac{3}{2}\sin(k+1)\theta\cdot\sin\theta - \cos(k+1)\theta\cdot\underbrace{(2\cos^2\theta - 1)}_{=\frac{1}{8}} - \sin(k+1)\theta\cdot 2\sin\theta\underbrace{\cos\theta}_{=\frac{3}{4}} \\
&= \frac{9}{8}\cos(k+1)\theta + \frac{3}{2}\sin(k+1)\theta\sin\theta - \frac{1}{8}\cos(k+1)\theta - \frac{3}{2}\sin(k+1)\theta\sin\theta \\
&= \cos(k+1)\theta
\end{aligned}$$

$\therefore$ $n = k+2$ のとき成り立つ

(i), (ii) より，すべてのnについて，$a_n = \cos(n-1)\theta$ が成り立つ．以上より，$\underline{\cos\theta = \frac{3}{4}}$ //