

1  $P(x)$ は $x^3$ の係数が1の3次式である。 $P(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りが $-3$ である。また、 $P(x)$ を $x-2$ で割ると割り切れ、その商を $Q(x)$ とする。 $Q(x)$ を $x+3$ で割ると余りが7である。

- (1)  $Q(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りを求めよ。
- (2)  $Q(x)$ を求めよ。
- (3)  $P(x)$ を $(x-1)(x+3)$ で割ったときの商と余りを求めよ。

(徳島大学 2013)

2 整数  $a$  に対して  $P(x) = x^3 - ax^2 + ax - 1$  とおく. 次の問いに答えよ.

(1)  $P(x)$  を  $x - 1$  で割ったときの商を求めよ.

(2) 3 次方程式  $P(x) = 0$  が虚数解をもつような整数  $a$  の値をすべて求めよ.

(3) 3 次方程式  $P(x) = 0$  のすべての解が整数となるような整数  $a$  の値をすべて求めよ.

(新潟大学 2015)

3  $a$  を実数とする. 整式  $f(x)$  を  $2x^2 + 3x - 2$  で割った余りは  $6x + a$  であり,  $x^3 - x + 6$  で割った余りは  $5x^2 - ax - 8$  である.

(1)  $a$  を求めよ.

(2)  $f(x)$  を  $x^2 - 2x + 3$  で割った余りを求めよ.

(学習院大学 2018)

4 実数  $x$  について、 $A = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 5$ 、 $B = x^2 + 2x + 2$  とおくと、次の問いに答えよ。

(1) 整式  $A$  を整式  $B$  で割った商と余りを求めよ。

(2)  $A$  を  $B$  の 2 次式で表せ。

(3) (2) で求めた式を用いて、 $\frac{A}{B}$  の最小値と、そのときの  $x$  の値を求めよ。

(岩手大学 2017)

5 1辺の長さが1の正方形OABCにおいて、ABを $p:(1-p)$ に内分する点をM、BCを $(1-q):q$ に内分する点をNとする。また、 $\triangle OMN$ の面積を $S$ とする。ただし、 $0 < p < 1$ 、 $0 < q < 1$ である。

(1)  $S$ を $p$ 、 $q$ を用いて表せ。

(2)  $p = \frac{1-q}{1+q}$  のとき、 $S$ の最小値とそれを与える $q$ の値を求めよ。

(滋賀県立大学 2016)



2013年医学部第1問

1  $P(x)$  は  $x^3$  の係数が1の3次式である.  $P(x)$  を  $x-1$  で割ったときの余りが  $-3$  である. また,  $P(x)$  を  $x-2$  で割ると割り切れ, その商を  $Q(x)$  とする.  $Q(x)$  を  $x+3$  で割ると余りが  $7$  である.

- (1)  $Q(x)$  を  $x-1$  で割ったときの余りを求めよ.  
 (2)  $Q(x)$  を求めよ.  
 (3)  $P(x)$  を  $(x-1)(x+3)$  で割ったときの商と余りを求めよ.

$$(1) P(x) = (x-1) \cdot R(x) - 3 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$P(x) = (x-2) \cdot Q(x) \quad \dots \textcircled{2}$$

$$Q(x) = (x+3)(x-\alpha) + 7 \quad \dots \textcircled{3}$$

$P(x)$  は  $x^3$  の係数が1の3次式  
 なので  $\textcircled{2}$  より  $Q(x)$  は  $x^2$  の係数が1  
 の2次式なので

$$\textcircled{1} \text{より}, P(1) = -3, \quad \textcircled{2} \text{より} P(1) = -Q(1) \quad \therefore Q(1) = 3$$

剰余の定理より,  $Q(x)$  を  $x-1$  で割った余りは 3 //

$$(2) (1) \text{と} \textcircled{3} \text{より}, Q(1) = 4(1-\alpha) + 7 = 3 \quad \therefore 1-\alpha = -1$$

$$\therefore \alpha = 2 \quad \therefore \textcircled{3} \text{に} \alpha = 2 \text{代入して}, \underline{Q(x) = x^2 + x + 1} //$$

$$(3) (2) \text{と} \textcircled{2} \text{より} P(x) = (x-2)(x^2 + x + 1)$$

$$= x^3 + x^2 + x - 2x^2 - 2x - 2$$

$$= x^3 - x^2 - x - 2$$

$$\begin{array}{r} x-3 \\ x^2+2x-3 \overline{) x^3-x^2-x-2} \\ \underline{x^3+2x^2-3x} \phantom{-2} \\ -3x^2+2x-2 \\ \underline{-3x^2-6x+9} \\ 8x-11 \end{array}$$

$\therefore$  商が  $x-3$ , 余りは  $8x-11$  //



2015年 第1問

1 整数  $a$  に対して  $P(x) = x^3 - ax^2 + ax - 1$  とおく. 次の問いに答えよ.

- (1)  $P(x)$  を  $x-1$  で割ったときの商を求めよ.  
 (2) 3次方程式  $P(x) = 0$  が虚数解をもつような整数  $a$  の値をすべて求めよ.  
 (3) 3次方程式  $P(x) = 0$  のすべての解が整数となるような整数  $a$  の値をすべて求めよ.

(1) 実際に割り算を実行すると,

よって, 商は  $\underline{x^2 + (1-a)x + 1}$  //

$$\begin{array}{r} x^2 + (1-a)x + 1 \\ x-1 \overline{) x^3 - ax^2 + ax - 1} \\ \underline{x^3 - x^2} \phantom{- 1} \\ (1-a)x^2 + ax - 1 \\ \underline{(1-a)x^2 + ax - x} \\ x - 1 \\ \underline{x - 1} \\ 0 \end{array}$$

(2) (1) より  $P(x) = 0$  は次のように表される

$$(x-1) \{ \underline{x^2 + (1-a)x + 1} \} = 0$$

虚数解をもつ.

$\therefore$  (中かこの中身)  $= 0$  の判別式を  $D$  とおくと,

$$D = (1-a)^2 - 4 < 0 \quad \therefore (a-1)^2 < 4 \quad \therefore -2 < a-1 < 2 \text{ より}$$

$$-1 < a < 3 \quad a: \text{整数より, } \underline{a = 0, 1, 2} //$$

(3)  $x^2 + (1-a)x + 1 = 0$  が整数の解のみをもてばよいので

解を  $\alpha, \beta$  とおく 解と係数の関係より  $\alpha\beta = 1$

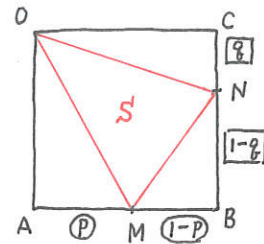
$\alpha, \beta$ : 整数より,  $(\alpha, \beta) = (1, 1)$  または  $(-1, -1)$

$$\therefore \alpha + \beta = a - 1 \quad \therefore a - 1 = 2, -2 \quad \therefore \underline{a = 3, -1} //$$

2016年 環境科学部・工学部 第3問



3 1辺の長さが1の正方形OABCにおいて、ABを $p:(1-p)$ に内分する点をM、BCを $(1-q):q$ に内分する点をNとする。また、 $\triangle OMN$ の面積をSとする。ただし、 $0 < p < 1$ 、 $0 < q < 1$ である。

(1) Sを $p, q$ を用いて表せ。(2)  $p = \frac{1-q}{1+q}$  のとき、Sの最小値とそれを与える $q$ の値を求めよ。

$$(1) S = (\text{正方形OABC}) - \triangle OAM - \triangle NMB - \triangle ONC$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot p - \frac{1}{2} \cdot (1-p)(1-q) - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot q$$

$$= 1 - \frac{p}{2} - \frac{1}{2}(1-p-q+pq) - \frac{q}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(1-pq)$$

(2)  $p = \frac{1-q}{1+q}$  のとき

$$S = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{q(1-q)}{1+q} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{(1+q)(2-q)-2}{1+q} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left( q-1 + \frac{2}{q+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( q+1 + \frac{2}{q+1} \right) - 1$$

 $q+1 > 0$  より、相加・相乗平均の関係を使って

$$(q+1) + \frac{2}{q+1} \geq 2\sqrt{(q+1) \cdot \frac{2}{q+1}}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

(等号成立は  $q+1 = \frac{2}{q+1}$ )  
すなわち、 $q = \sqrt{2}-1$  のとき

このとき  $p$  は、 $p = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$

$$\therefore S \geq \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} - 1$$

$$= \sqrt{2} - 1$$

$\therefore S$  の最小値は  $\sqrt{2}-1$  ( $p=q=\sqrt{2}-1$  のとき)