

1 2つの変数 x, y のデータが, n 個の x, y の値の組として

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

のように与えられているとする. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) x, y の平均値をそれぞれ \bar{x}, \bar{y} とするとき, 変数 x と y の共分散 s_{xy} は

$$s_{xy} = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right) - \bar{x} \bar{y}$$

であることを示せ.

(2) これらのデータの間には, $y_k = ax_k + b$ ($k = 1, 2, \dots, n$) という関係があるとする. ただし, a, b は実数で, $a \neq 0$ である. 変数 x の標準偏差 s_x は 0 でないとする. このとき, x と y の相関係数を求めよ.

(信州大学 2016)

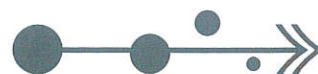
2 1つのさいころを3回投げる．1回目に出る目の数，2回目に出る目の数，3回目に出る目の数をそれぞれ X_1, X_2, X_3 とし，5つの数

$$2, 5, 2 - X_1, 5 + X_2, X_3$$

からなるデータを考える．以下の問いに答えよ．

- (1) データの範囲が7以下である確率を求めよ．
- (2) X_3 がデータの中央値に等しい確率を求めよ．
- (3) X_3 がデータの平均値に等しい確率を求めよ．
- (4) データの中央値と平均値が一致するとき， X_3 が中央値に等しい条件付き確率を求めよ．

(熊本大学 2016)



2016年 経済学部 第1問

1 2つの変数 x, y のデータが, n 個の x, y の値の組として

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

のように与えられているとする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) x, y の平均値をそれぞれ \bar{x}, \bar{y} とするとき、変数 x と y の共分散 s_{xy} は

$$s_{xy} = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right) - \bar{x} \bar{y}$$

であることを示せ。

(2) これらのデータの間には, $y_k = ax_k + b$ ($k = 1, 2, \dots, n$) という関係があるとする。ただし, a, b は実数で, $a \neq 0$ である。変数 x の標準偏差 s_x は 0 でないとする。このとき, x と y の相関係数を求めよ。

(1) 共分散の定義より

$$\begin{aligned} s_{xy} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) \quad \leftarrow \text{展開する。} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k y_k - \bar{y} \cdot \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k}_{=\bar{x}} - \bar{x} \cdot \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k}_{=\bar{y}} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \underbrace{\bar{x} \bar{y}}_{=n\bar{x}\bar{y}} \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right) - \bar{y} \bar{x} - \bar{x} \bar{y} + \bar{x} \bar{y} \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right) - \bar{x} \bar{y} \quad \square \end{aligned}$$

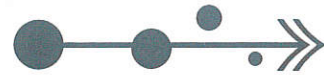
$$(2) s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 \quad \dots \textcircled{1} \quad \text{と} \quad \bar{y} = a\bar{x} + b \quad \dots \textcircled{2} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} s_y^2 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (y_k - \bar{y})^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \{ ax_k + b - (a\bar{x} + b) \}^2 \quad (\because \textcircled{2} \text{ より}) \\ &= a^2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 \\ &= a^2 s_x^2 \quad (\because \textcircled{1} \text{ より}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{また, } s_{xy} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x}) \{ ax_k + b - (a\bar{x} + b) \} \\ &= a \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 \\ &= a \cdot s_x^2 \end{aligned}$$

$$\therefore r = \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_x^2} \sqrt{s_y^2}} = \frac{a s_x^2}{|a| s_x^2} = \frac{a}{|a|}$$

$$\therefore r = \begin{cases} 1 & (a > 0 \text{ のとき}) \\ -1 & (a < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$



2016年 第2問

2 1つのさいころを3回投げる。1回目に出る目の数、2回目に出る目の数、3回目に出る目の数をそれぞれ X_1, X_2, X_3 とし、5つの数

$$2, 5, 2 - X_1, 5 + X_2, X_3$$

からなるデータを考える。以下の問いに答えよ。

- (1) データの範囲が7以下である確率を求めよ。
- (2) X_3 がデータの中央値に等しい確率を求めよ。
- (3) X_3 がデータの平均値に等しい確率を求めよ。
- (4) データの中央値と平均値が一致するとき、 X_3 が中央値に等しい条件付き確率を求めよ。

(1) $1 \leq X_1, X_2, X_3 \leq 6$ より、

$$2 - X_1 < 2 < 5 < 5 + X_2 \quad \text{かつ} \quad 2 - X_1 \leq X_3 \leq 5 + X_2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

よって、データの範囲は、 X_3 の値によらず、 $5 + X_2 - (2 - X_1) = X_1 + X_2 + 3$

$$\therefore X_1 + X_2 + 3 \leq 7 \iff X_1 + X_2 \leq 4$$

$\therefore (X_1, X_2) = (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)$ の6通り

$$\text{よって、求める確率は、} \frac{6}{6^2} = \frac{1}{6} \text{。}$$

(2) ①より、 $2 \leq X_3 \leq 5$ の4通り $\therefore \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ 。

$$(3) \frac{2+5+(2-X_1)+(5+X_2)+X_3}{5} = X_3 \iff X_3 = \frac{14-X_1+X_2}{4}$$

~~~~~ 平均値

$$\therefore \frac{9}{4} \leq X_3 \leq \frac{19}{4} \quad \therefore X_3 = 3 \text{ または } X_3 = 4$$

$$X_3 = 3 \text{ のとき, } X_1 - X_2 = 2 \quad \therefore (X_1, X_2) = (3, 1), (4, 2), (5, 3), (6, 4)$$

$$X_3 = 4 \text{ のとき, } X_2 - X_1 = 2 \quad \therefore (X_1, X_2) = (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)$$

$$\text{以上の8通りなので, } \frac{8}{6^3} = \frac{1}{27} \text{。}$$

$$(4) (i) \text{ 中央値が2のとき, 平均値は, } \frac{14-X_1+X_2+X_3}{5} = 2 \quad \therefore X_1 = 4+X_2+X_3 \quad \therefore (X_1, X_2, X_3) = (6, 1, 1)$$

(ii) 中央値が  $X_3$  のとき, (3)より, 8通り

$$(iii) \text{ 中央値が5のとき, } \frac{14-X_1+X_2+X_3}{5} = 5 \quad \therefore X_2+X_3 = X_1+11 \quad (X_1, X_2, X_3) = (1, 6, 6)$$

$$(i) \sim (iii) \text{ より, 求める確率は, } \frac{\frac{8}{6^3}}{\frac{10}{6^3}} = \frac{4}{5} \text{。}$$