______年　番号______　　氏名______________________________

$\boxed{1}$ 2つの変量 x，y のデータが，n 個の x，y の値の組として

$$(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2),\ \cdots,\ (x_n,\ y_n)$$

のように与えられているとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) x，y の平均値をそれぞれ $\overline{x}$，$\overline{y}$ とするとき，変量 x と y の共分散 s_{xy} は

$$s_{xy} = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right) - \overline{x}\,\overline{y}$$

であることを示せ．

(2) これらのデータの間には，$y_k = ax_k + b$ $(k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ という関係があるとする．ただし，a，b は実数で，$a \neq 0$ である．変量 x の標準偏差 s_x は 0 でないとする．このとき，x と y の相関係数を求めよ．

（信州大学　2016）

$\boxed{2}$ 1つのさいころを3回投げる．1回目に出る目の数，2回目に出る目の数，3回目に出る目の数をそれぞれ X_1，X_2，X_3 とし，5つの数

$$2,\quad 5,\quad 2-X_1,\quad 5+X_2,\quad X_3$$

からなるデータを考える．以下の問いに答えよ．

(1) データの範囲が7以下である確率を求めよ．

(2) X_3 がデータの中央値に等しい確率を求めよ．

(3) X_3 がデータの平均値に等しい確率を求めよ．

(4) データの中央値と平均値が一致するとき，X_3 が中央値に等しい条件付き確率を求めよ．

（熊本大学　2016）

信州大学

2016年 経済学部 第1問

1 2つの変量 x, y のデータが，n 個の x, y の値の組として

$(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2),\ \cdots,\ (x_n,\ y_n)$

のように与えられているとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) x, y の平均値をそれぞれ $\overline{x}$, $\overline{y}$ とするとき，変量 x と y の共分散 s_{xy} は

$$s_{xy}=\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\right)-\overline{x}\,\overline{y}$$

であることを示せ．

(2) これらのデータの間には，$y_k=ax_k+b$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ という関係があるとする．ただし，a, b は実数で，$a \fallingdotseq 0$ である．変量 x の標準偏差 s_x は0でないとする．このとき，x と y の相関係数を求めよ．

(1) 共分散の定義より

$$s_{xy}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})(y_k-\overline{y})$$ 展開する.

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_ky_k-\overline{y}\cdot\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k}_{=\overline{x}}-\overline{x}\cdot\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k}_{=\overline{y}}+\frac{1}{n}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\overline{x}\,\overline{y}}_{=n\overline{x}\,\overline{y}}$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\right)-\overline{y}\,\overline{x}-\overline{x}\,\overline{y}+\overline{x}\,\overline{y}$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\right)-\overline{x}\,\overline{y} \quad ▨$$

(2) $s_x^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})^2$ …① と $\overline{y}=a\overline{x}+b$ …② より

$$s_y^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(y_k-\overline{y})^2$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\{ax_k+b-(a\overline{x}+b)\}^2 \quad (\because ②より)$$

$$=a^2\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})^2$$

$$=a^2s_x^2 \quad (\because ①より)$$

また，$s_{xy}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})(y_k-\overline{y})$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})\{ax_k+b-(a\overline{x}+b)\}$$

$$=a\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})^2$$

$$=a\cdot s_x^2$$

よって，$r=\dfrac{s_{xy}}{\sqrt{s_x^2}\sqrt{s_y^2}}=\dfrac{a\,s_x^2}{|a|\,s_x^2}=\dfrac{a}{|a|}$

$$\therefore r=\begin{cases}1 & (a>0 のとき)\\ -1 & (a<0 のとき)\end{cases}$$ //

熊本大学

2016年第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 1つのさいころを3回投げる．1回目に出る目の数，2回目に出る目の数，3回目に出る目の数をそれぞれ X_1，X_2，X_3 とし，5つの数

$$2,\quad 5,\quad 2-X_1,\quad 5+X_2,\quad X_3$$

からなるデータを考える．以下の問いに答えよ．

(1) データの範囲が7以下である確率を求めよ．

(2) X_3 がデータの中央値に等しい確率を求めよ．

(3) X_3 がデータの平均値に等しい確率を求めよ．

(4) データの中央値と平均値が一致するとき，X_3 が中央値に等しい条件付き確率を求めよ．

(1) $1 \leqq X_1, X_2, X_3 \leqq 6$ より,

$2-X_1 < 2 < 5 < 5+X_2$ かつ $2-X_1 \leqq X_3 \leqq 5+X_2$ …①

よって, データの範囲は, X_3 の値によらず, $5+X_2-(2-X_1) = X_1+X_2+3$

$\therefore X_1+X_2+3 \leqq 7 \iff X_1+X_2 \leqq 4$

$\therefore (X_1, X_2) = (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1)$ の6通り

よって, 求める確率は, $\dfrac{6}{6^2} = \underline{\dfrac{1}{6}}$ //

(2) ①より, $2 \leqq X_3 \leqq 5$ の4通り　$\therefore \dfrac{4}{6} = \underline{\dfrac{2}{3}}$ //

(3) $\underbrace{\dfrac{2+5+(2-X_1)+(5+X_2)+X_3}{5}}_{\text{平均値}} = X_3 \iff X_3 = \dfrac{14-X_1+X_2}{4}$

$\therefore \dfrac{9}{4} \leqq X_3 \leqq \dfrac{19}{4}$　$\therefore X_3 = 3$ または $X_3 = 4$

$X_3 = 3$ のとき, $X_1 - X_2 = 2$　$\therefore (X_1, X_2) = (3,1), (4,2), (5,3), (6,4)$

$X_3 = 4$ のとき, $X_2 - X_1 = 2$　$\therefore (X_1, X_2) = (1,3), (2,4), (3,5), (4,6)$

以上の8通りなので, $\dfrac{8}{6^3} = \underline{\dfrac{1}{27}}$ //

(4) (i) 中央値が2のとき, 平均値は, $\dfrac{14-X_1+X_2+X_3}{5} = 2$　$\therefore X_1 = 4+X_2+X_3$　$\therefore (X_1, X_2, X_3) = (6,1,1)$

(ii) 中央値が X_3 のとき, (3)より, 8通り

(iii) 中央値が5のとき, $\dfrac{14-X_1+X_2+X_3}{5} = 5$　$\therefore X_2+X_3 = X_1+11$　$(X_1, X_2, X_3) = (1,6,6)$

(i)～(iii)より, 求める確率は, $\dfrac{\frac{8}{6^3}}{\frac{10}{6^3}} = \underline{\dfrac{4}{5}}$ //