

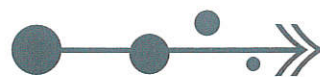
1 実数 x をこえない最大の整数を $[x]$ とし, $\langle x \rangle = x - [x]$ とする. また, a を定数として次の方程式を考える.

$$4\langle x \rangle^2 - \langle 2x \rangle - a = 0$$

ただし, $\langle x \rangle^2$ は $\langle x \rangle$ の二乗を表すとする.

- (1) $x = 1.7$ のとき $\langle x \rangle$ および $\langle 2x \rangle$ を求めなさい.
- (2) a が上の方程式の解ならば, 任意の整数 n について $a + n$ も解であることを示しなさい.
- (3) 上の方程式が解を持つような実数 a の範囲を求めなさい.

(福島大学 2015)



2015年人文A第5問

5 実数 x をこえない最大の整数を $[x]$ とし、 $\langle x \rangle = x - [x]$ とする。また、 a を定数として次の方程式を考える。

$$4\langle x \rangle^2 - \langle 2x \rangle - a = 0$$

ただし、 $\langle x \rangle^2$ は $\langle x \rangle$ の二乗を表すとする。

- (1) $x = 1.7$ のとき $\langle x \rangle$ および $\langle 2x \rangle$ を求めなさい。
- (2) a が上の方程式の解ならば、任意の整数 n について $a + n$ も解であることを示しなさい。
- (3) 上の方程式が解を持つような実数 a の範囲を求めなさい。

$$(1) \langle x \rangle = \langle 1.7 \rangle = 1.7 - [1.7] = 1.7 - 1 = \underline{0.7} //$$

$$\langle 2x \rangle = \langle 3.4 \rangle = 3.4 - [3.4] = 3.4 - 3 = \underline{0.4} //$$

$$(2) a \text{ が解のとき, } 4\langle a \rangle^2 - \langle 2a \rangle - a = 0 \cdots \textcircled{1} \text{ が成り立つ}$$

このとき、 $[a+n] = [a] + n$, $[2a+2n] = [2a] + 2n$ なので、

$$\begin{aligned} 4\langle a+n \rangle^2 - \langle 2a+2n \rangle - a &= 4(a+n - [a+n])^2 - (2a+2n - [2a+2n]) - a \\ &= 4\{a+n - ([a] + n)\}^2 - \{2a+2n - ([2a] + 2n)\} - a \\ &= 4(a - [a])^2 - (2a - [2a]) - a \\ &= 4\langle a \rangle^2 - \langle 2a \rangle - a \\ &= 0 \quad (\because \textcircled{1} \text{ より}) \end{aligned}$$

よって、1任意の整数 n について、 $a+n$ も解である \square

(3) (2) より、 $0 \leq x < 1$ の範囲に少なくとも1個の解をもつような実数 a の範囲を求めればよい。

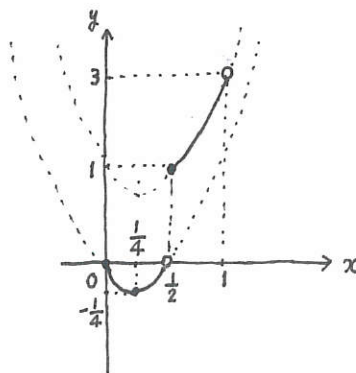
(i) $0 \leq x < \frac{1}{2}$ のとき、 $[x] = [2x] = 0$ より、

$$y = 4\langle x \rangle^2 - \langle 2x \rangle \text{ とおくと、}$$

$$\begin{aligned} y &= 4(x - [x])^2 - (2x - [2x]) \\ &= 4x^2 - 2x \quad \rightarrow = 4\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(ii) $\frac{1}{2} \leq x < 1$ のとき、 $[x] = 0$, $[2x] = 1$ より、

$$\begin{aligned} y &= 4\langle x \rangle^2 - \langle 2x \rangle \\ &= 4(x - [x])^2 - (2x - [2x]) \\ &= 4x^2 - 2x + 1 \quad \rightarrow = 4\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} \end{aligned}$$



(i)(ii) より、グラフは右のようになり、 $y = a$ と共有点をもてばよいから、 $-\frac{1}{4} \leq a \leq 0, 1 \leq a < 3 //$