＿＿＿年　番号＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ．

(1) 関数 $y=\dfrac{2x+5}{x+2}$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ の逆関数を求めよ．また，その定義域を求めよ．

(2) 次の関数の導関数を求めよ．

$$y=\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{\sin x}}$$

(3) 次の不定積分，定積分を求めよ．

(i) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\,dx$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{(2x+1)^2}\,dx$

（広島市立大学　2016）

$\boxed{2}$ a を正の定数とする．2 つの曲線 $C_1 : y=x\log x$ と $C_2 : y=ax^2$ の両方に接する直線の本数を求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^2}{x}=0$ は証明なしに用いてよい．

（横浜国立大学　2016）

$\boxed{3}$ $f(x)=\sqrt{x}e^{-\frac{x}{2}}$（ただし，$x>0$）に対し，座標平面上の曲線 $C : y=f(x)$ を考える．

(1) $f(x)$ の極値を求めよ．

(2) 曲線 C，2 直線 $x=t$，$x=t+1$（ただし，$t>0$）および x 軸で囲まれる図形を，x 軸の周りに 1 回転して得られる立体の体積 V を t を用いて表せ．

(3) V の最大値を求めよ．

（東京海洋大学　2016）

2016年 第1問

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ．

(1) 関数 $y = \dfrac{2x+5}{x+2}$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ の逆関数を求めよ．また，その定義域を求めよ．

(2) 次の関数の導関数を求めよ．

$$y = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{\sin x}}$$

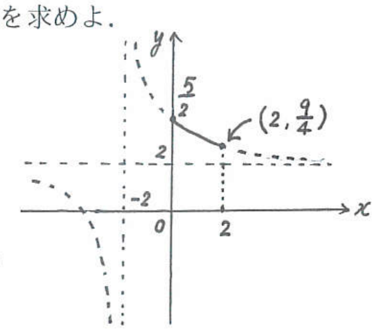
(3) 次の不定積分，定積分を求めよ．

(i) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\,dx$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{(2x+1)^2}\,dx$

(1) $y = \dfrac{2(x+2)+1}{x+2}$

$= \dfrac{1}{x+2} + 2$



$0 \leqq x \leqq 2$ のとき右図より

$\dfrac{9}{4} \leqq y \leqq \dfrac{5}{2}$

x と y を入れかえて

$x = \dfrac{1}{y+2} + 2$ $\left(\dfrac{9}{4} \leqq x \leqq \dfrac{5}{2}\right)$

$\therefore$ $\underline{y = -\dfrac{2x-5}{x-2}\ \left(\dfrac{9}{4} \leqq x \leqq \dfrac{5}{2}\right)}$ //

(2) $y' = \dfrac{(e^{\frac{x}{2}})'\sqrt{\sin x} - e^{\frac{x}{2}}(\sqrt{\sin x})'}{\sin x}$

$= \dfrac{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\sqrt{\sin x} - e^{\frac{x}{2}} \cdot \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}}{\sin x}$

$= \underline{\dfrac{e^{\frac{x}{2}}(\sin x - \cos x)}{2\sin x\sqrt{\sin x}}}$ //

(3) (i) $t = \sin x$ とおいて置換積分する．$dt = \cos x\,dx$

(与式) $= \displaystyle\int \frac{1-t^2}{t^2}\,dt$

$= \displaystyle\int t^{-2} - 1\,dt$

$= -t^{-1} - t + C$

$= \underline{-\dfrac{1}{\sin x} - \sin x + C}$ (Cは積分定数) //

(ii) $t = 2x+1$ とおいて置換積分する．$dt = 2\,dx$， $\begin{array}{c|c} x & 0 \to \frac{1}{2} \\ \hline t & 1 \to 2 \end{array}$

(与式) $= \displaystyle\int_1^2 \frac{t-1}{2t^2} \cdot \frac{1}{2}\,dt$

$= \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{t} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{t^2}\,dt$

$= \left[\dfrac{1}{4}\log|t| + \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{t}\right]_1^2$

$= \dfrac{1}{4}\log 2 + \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{4}$ $= \underline{\dfrac{1}{8}(2\log 2 - 1)}$ //

2016年 理工 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ aを正の定数とする．2つの曲線 $C_1: y = x\log x$ と $C_2: y = ax^2$ の両方に接する直線の本数を求めよ．ただし，$\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^2}{x} = 0$ は証明なしに用いてよい．

C_1の接点を$(s, s\log s)$ $(s>0)$とおくと，

$y' = \log x + 1$ より，接線は，

$y = (\log s+1)(x-s) + s\log s$

$\therefore y = (\log s + 1)x - s \quad \cdots ①$

C_2の接点を(t, at^2)とおくと

$y' = 2ax$ より，接線は，

$y = 2at(x-t) + at^2$

$\therefore y = 2atx - at^2 \cdots ②$

①，②は同一の直線を表すから，

$$\begin{cases} \log s + 1 = 2at & \cdots ③ \\ s = at^2 & \cdots ④ \end{cases}$$

③より，$t = \dfrac{\log s+1}{2a}$

これを④に代入して整理すると，$\dfrac{(\log s+1)^2}{4s} = a$

$\therefore f(x) = \dfrac{(\log x+1)^2}{4x}$ とおくと

$y = f(x)$ と $y = a$ のグラフの交点の個数を調べればよい

$$f'(x) = \frac{2(\log x+1)\cdot\frac{1}{x}\cdot 4x - (\log x+1)^2\cdot 4}{16x^2}$$

$$= \frac{(\log x+1)(1-\log x)}{4x^2}$$

よって，$f'(x) = 0$ となるのは，$x = \frac{1}{e}, e$

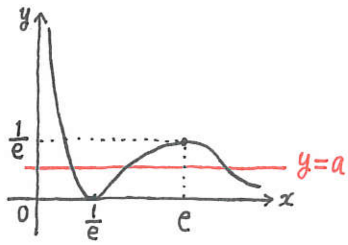
x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		↘	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘

（つづき）

また，$\lim_{x\to+0} f(x) = +\infty$，$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ より，

$\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^2}{x} = 0$ を使った

グラフは下のようになる．



$$\therefore \begin{cases} 0 < a < \frac{1}{e} \text{ のとき } 3\text{本} \\ a = \frac{1}{e} \text{ のとき } 2\text{本} \\ a > \frac{1}{e} \text{ のとき } 1\text{本} \end{cases}$$

東京海洋大学

2016年 海洋工 第5問

数理 石井K

$\boxed{5}$ $f(x)=\sqrt{x}e^{-\frac{x}{2}}$（ただし，$x>0$）に対し，座標平面上の曲線$C：y=f(x)$を考える．

(1) $f(x)$の極値を求めよ．

(2) 曲線C，2直線$x=t$，$x=t+1$（ただし，$t>0$）およびx軸で囲まれる図形を，x軸の周りに1回転して得られる立体の体積Vをtを用いて表せ．

(3) Vの最大値を求めよ．

(1) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot e^{-\frac{x}{2}}+\sqrt{x}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right)$

$=\dfrac{1-x}{2\sqrt{x}}e^{-\frac{x}{2}}$

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		+		−
$f(x)$		↗	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↘

∴ $f'(x)=0$ となるのは，$x=1$ のとき

右の増減表より，極大値 $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ ($x=1$ のとき) をとる //

(2) $x>0$ において，$f(x)>0$ であるから

$$V=\pi\int_t^{t+1}\left(\sqrt{x}e^{-\frac{x}{2}}\right)^2dx$$

$$=\pi\int_t^{t+1}x\cdot(-e^{-x})'\,dx$$

$$=\pi\left[-xe^{-x}\right]_t^{t+1}-\pi\int_t^{t+1}-e^{-x}\,dx$$

$$=\pi\left\{-(t+1)e^{-(t+1)}+te^{-t}\right\}-\pi\left[e^{-x}\right]_t^{t+1}$$

$$=\pi\left\{-(t+1)e^{-t-1}+te^{-t}-e^{-t-1}+e^{-t}\right\}$$

$$=\pi\left\{(e-1)t+e-2\right\}e^{-t-1}$$ //

(3) $V'=\pi(e-1)e^{-t-1}+\pi\{(e-1)t+e-2\}\cdot(-e^{-t-1})$

$=\pi\{1-(e-1)t\}e^{-t-1}$

∴ $V'=0$ となるのは，$t=\dfrac{1}{e-1}$ のとき

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e-1}$	$\cdots$
V'		+	0	−
V		↗		↘

$t=\dfrac{1}{e-1}$ のとき，$V=\pi(e-1)e^{-\frac{e}{e-1}}$

∴ 右の増減表より，Vの最大値は，

$\pi(e-1)e^{-\frac{e}{e-1}}$ （$t=\dfrac{1}{e-1}$ のとき） //