$\boxed{1}$ 四面体OABCにおいて△ABCの重心をGとし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする．辺OC上に点Pをとり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\vec{c}$ $(0<t<1)$ とする．さらに△ABPと線分OGとの交点をXとし，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=s\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ $(0<s<1)$ とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PX}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ と t，s を用いて表せ．

(2) 2点P，Xを結ぶ直線と線分ABとの交点Mが線分ABの中点であることを証明せよ．

(3) △OMCにおいて2点C，Xを結ぶ直線と線分OMとの交点をNとする．NX：XC＝2：5のとき t と s の値を求めよ．

$\boxed{2}$ 四面体OABCにおいて，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=2$ かつ $\mathrm{BC}=3$ であるとする．$\triangle\mathrm{OBC}$ の重心を G とするとき，直線 AG は $\triangle\mathrm{OBC}$ を含む平面に垂直であるとする．

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を求めよ．

(2) 点 B から $\triangle\mathrm{OAC}$ を含む平面に下ろした垂線は，直線 AG と交わらないことを示せ．

$\boxed{3}$ $0 < t < 3$ を満たす実数 t に対し，平面上の相異なる 4 点 O，A，B，C を次の条件（ｉ），（ii）を満たすようにとる．

（ｉ）$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を θ とするとき，$\tan\theta = \dfrac{1}{t+1}$

（ii）$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = t-3$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0$

線分 OA を $t:1$ に内分する点を D とし，△OCD の面積を $S(t)$ とする．$S(t)$ の最大値を求めよ．

$\boxed{4}$ x，y，z を $0 < x < 1$，$0 < y < 1$，$0 < z < 1$ を満たす実数とする．面積が1の△ABCにおいて，辺BC，CA，AB上にそれぞれ点D，E，Fを $\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BC}} = x$，$\dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{CA}} = y$，$\dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AB}} = z$ を満たすようにとる．△AFEの面積を S_1，△DEFの面積を S_2 とおくとき，次の問いに答えなさい．

(1) $x = \dfrac{2}{3}$，$y = \dfrac{2}{3}$，$z = \dfrac{1}{3}$ のとき，S_1 と S_2 を求めなさい．

(2) S_2 を x，y，z を用いて表しなさい．

(3) △ABCの重心と△DEFの重心が一致し，かつ $S_2 = \dfrac{1}{3}$ が成り立つような x，y，z の組 (x, y, z) をすべて求めなさい．

$\boxed{5}$ 三角形ABCとその内部に点Oがあり，正の実数k，lに対して

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{OB}}+l\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$$

を満たしていると仮定する．さらに直線OAと辺BC，直線OBと辺CA，直線OCと辺ABの交点をそれぞれD，E，Fとする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}$とおくとき，$x$を$k$，$l$を用いて表せ．さらに$\dfrac{\mathrm{OD}}{\mathrm{AD}}$を$k$，$l$を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$とおくとき，$y$を$k$，$l$を用いて表せ．さらに$\dfrac{\mathrm{OE}}{\mathrm{BE}}$を$k$，$l$を用いて表せ．

(3) $\dfrac{\mathrm{OD}}{\mathrm{AD}}+\dfrac{\mathrm{OE}}{\mathrm{BE}}+\dfrac{\mathrm{OF}}{\mathrm{CF}}=1$を示せ．

$\boxed{6}$ 一辺の長さが1の立方体OABC-DEFGにおいて，線分BFを$2:1$に内分する点をP，線分EFの中点をQとする．また，線分OFと平面PQGの交点をRとする．次の各問いに答えよ．

(1) ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$を，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=s\overrightarrow{\mathrm{OF}}$を満たす実数$s$を求めよ．

(3) $\triangle$PQGの重心をSとするとき，線分RSの長さを求めよ．

$\boxed{7}$ 正方形ABCDの辺を除く内部に，PA $\perp$ PBを満たす点Pがある．ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$を$x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+y\overrightarrow{\mathrm{PB}}$と表すとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}$とするとき，$x$，$y$を$\alpha$を用いて表せ．

(2) 点Pが題意の条件を満たしながら動くとき，(1)で求めたx，yの和$x+y$の最大値を求め，そのときのPがどのような点かを答えよ．

$\boxed{8}$ nを4以上の整数とする．座標平面上で正n角形$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_n$は点Oを中心とする半径1の円に内接している．$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_4}$とし，$k=2\cos\dfrac{2\pi}{n}$とおく．そして，線分$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3$と線分$\mathrm{A}_2\mathrm{A}_4$との交点Pは線分$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3$を$t:1-t$に内分するとする．

(1) $\vec{a}$および$\vec{d}$を，$\vec{b}$，$\vec{c}$，kを用いて表せ．

(2) tをkを用いて表し，$\dfrac{1}{2}\leqq t<\dfrac{3}{4}$を示せ．

(3) 不等式$\dfrac{\triangle\mathrm{PA}_2\mathrm{A}_3}{\triangle\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_4}>\dfrac{1}{12}$を示せ．

$\boxed{9}$ 座標空間内の次のような4点A，B，C，Dを考える．Aの座標は$(\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{6})$，3点B，C，Dは，それぞれ$x$軸，$y$軸，$z$軸上にある．さらに，これらの4点は同一平面上にあり，四角形ABCDは平行四辺形である．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 3点B，C，Dの座標を求めよ．

(2) 平行四辺形ABCDの面積を求めよ．

(3) 原点Oから平行四辺形ABCDを含む平面に垂線OHを下ろす．点Hの座標を求めよ．

$\boxed{10}$ 座標空間において，原点$(0,\ 0,\ 0)$と点$(1,\ 1,\ -3)$を通る直線をℓ，2つの点$(-6,\ 6,\ 0)$，$(1,\ 2,\ 1)$を通る直線をmとする．直線ℓ上の点Pと直線m上の点Qを，直線PQが直線ℓ，mのいずれにも直交するようにとる．次の問いに答えよ．

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$を求めよ．

(2) Aを直線ℓ上の点，Bを直線m上の点とする．ただし，$\mathrm{A} \neq \mathrm{P}$とする．このとき，$\angle\mathrm{APB} = \dfrac{\pi}{2}$であることを示せ．

(3) 直線ℓ上の2点A，Cをそれらの中点がPとなるようにとる．同様に，直線m上の2点B，Dをそれらの中点がQとなるようにとる．$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}| = a$，$|\overrightarrow{\mathrm{QB}}| = b$のとき，三角形BDPの面積と四面体ABCDの体積を求めよ．

$\boxed{11}$ xyz 空間内に 3 点 A(2, 0, 1), B(0, 3, -1), C(0, 3, -3) がある．線分 BC 上の点を P(0, 3, s) とおく．線分 AP を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする．ただし，t は $0<t<1$ を満たす．点 Q を中心とする半径 3 の球面を K とし，球面 K と xy 平面が交わってできる円の面積を S_1，球面 K と yz 平面が交わってできる円の面積を S_2 とおく．以下の問いに答えよ．

(1) 球面 K の方程式を求めよ．

(2) S_1 を s と t の式で表せ．

(3) 点 P は線分 BC 上で固定し，点 Q は線分 AP 上を動くものとする．S_1+S_2 が最大値をとる t を s の式で表せ．

(4) (3) において点 Q が線分 AP の中点であるときに S_1+S_2 が最大値をとるとする．このときの s の値を求めよ．

$\boxed{12}$ t を実数とする．空間の 4 点 A(1, 5, 0)，B(4, 2, 0)，C(t, $2t$, $t-1$)，D(1, 6, 1) について，以下の問いに答えよ．

(1) △ABC が直角三角形になる t の値をすべて求めよ．

(2) A，B，C，D が同一平面上にあるような t の値を求めよ．

(3) ∠BAC が直角のとき，四面体 ABCD の体積を求めよ．

$\boxed{13}$ 空間内の3点A，B，Cを頂点とする△ABCを考える．2辺BC，ACの中点をそれぞれM，Nとし，中線AMとBNの交点をGとする．以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$を，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$を用いて表せ．

(2) 2点P，Qが$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$を満たすとき，3点P，Q，Gは同一直線上にあることを示せ．

(3) △ABCの頂点の座標がA(0, 0, 1)，B(7, 0, 6)，C(2, 12, 5)であるとき，xy平面上を動く点P(x, y, 0)を考える．このとき，$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$の最小値とそのときのPの座標を求めよ．

(4) (3)において，特に点P(x, y, 0)が，xy平面上の円$x^2+y^2=1$の周上を動くものとする．$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$の最大値とそのときのPの座標，および最小値とそのときのPの座標を，それぞれ求めよ．

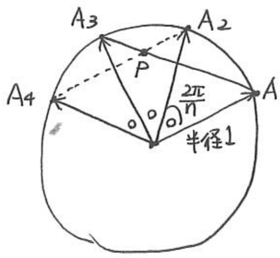
2017年 理学部（数学・情報数理）第1問　　1枚目/2　　増田

$\boxed{1}$ nを4以上の整数とする．座標平面上で正n角形$A_1A_2\cdots A_n$は点Oを中心とする半径1の円に内接している．$\vec{a}=\overrightarrow{OA_1}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OA_2}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OA_3}$，$\vec{d}=\overrightarrow{OA_4}$とし，$k=2\cos\dfrac{2\pi}{n}$とおく．そして，線分$A_1A_3$と線分$A_2A_4$との交点Pは線分$A_1A_3$を$t:1-t$に内分するとする．

(1) $\vec{a}$および$\vec{d}$を，$\vec{b}$，$\vec{c}$，kを用いて表せ．

(2) tをkを用いて表し，$\dfrac{1}{2}\leqq t<\dfrac{3}{4}$を示せ．

(3) 不等式 $\dfrac{\triangle PA_2A_3}{\triangle A_1A_2A_4}>\dfrac{1}{12}$ を示せ．



(1) $\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\dfrac{2\pi}{n}=\dfrac{k}{2}$

$\vec{a}=x\vec{b}+y\vec{c}$ とおく。

$\vec{a}\cdot\vec{b}=x+y\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\dfrac{2\pi}{n}$

$\therefore\ x+\dfrac{k}{2}y=\dfrac{k}{2}$

$\vec{a}\cdot\vec{c}=x\vec{b}\cdot\vec{c}+y=|\vec{a}||\vec{c}|\cos\left(2\times\dfrac{2\pi}{n}\right)$

$\therefore\ \dfrac{k}{2}x+y=2\left(\dfrac{k}{2}\right)^2-1$

連立方程式

$$\begin{cases} x+\dfrac{k}{2}y=\dfrac{k}{2} \\ \dfrac{k}{2}x+y=\dfrac{k^2}{2}-1 \end{cases}$$

を解くと、　$x=k$, $y=-1$

$\underline{\vec{a}=k\vec{b}-\vec{c}}$ //

また、$\vec{d}$の場合も $\vec{d}=x\vec{b}+y\vec{c}$ とおいて、$\vec{c}\cdot\vec{d}$ と $\vec{b}\cdot\vec{d}$ を計算することから　$x=-1$, $y=k$

$\underline{\vec{d}=-\vec{b}+k\vec{c}}$ //

(2) PはA₁A₃を$t:1-t$に内分するので

$\overrightarrow{OP}=(1-t)\vec{a}+t\vec{c}$

$=(k-kt)\vec{b}+(2t-1)\vec{c}$

Pは直線A_2A_4上にもあるので、$\overrightarrow{A_2P}$ と $\overrightarrow{A_2A_4}$ は実数倍の関係にある。

$\overrightarrow{A_2P}=\overrightarrow{OP}-\vec{b}$

$=(k-kt-1)\vec{b}+(2t-1)\vec{c}$

$\overrightarrow{A_2A_4}=\vec{d}-\vec{b}$

$=-2\vec{b}+k\vec{c}$

$(k-kt-1):(-2)=(2t-1):k$ だから

$(k^2-4)t=(k+1)(k-2)$

ここで、$\cos\dfrac{2\pi}{n}\neq1$ より $k\neq2$

両辺を$(k-2)$で割り、

$(k+2)t=k+1$

また、nは4以上だから

$0\leqq\cos\dfrac{2\pi}{n}<1$

$0\leqq k<2$

よってさらに $k+2\ (\neq0)$ で割って

$\underline{t=\dfrac{k+1}{k+2}}$ //

$t=\dfrac{k+1}{k+2}=1-\dfrac{1}{k+2}$

$0\leqq k<2$ では、

$\dfrac{1}{2}\leqq t<\dfrac{3}{4}$

となる。

0002385634167999

千葉大学

2017年 理学部（数学・情報数理）第1問　　2枚目/2

増田

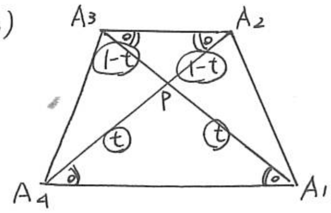
$\boxed{1}$ nを4以上の整数とする．座標平面上で正n角形$A_1A_2\cdots A_n$は点Oを中心とする半径1の円に内接している．$\vec{a}=\overrightarrow{OA_1}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OA_2}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OA_3}$，$\vec{d}=\overrightarrow{OA_4}$とし，$k=2\cos\dfrac{2\pi}{n}$とおく．そして，線分$A_1A_3$と線分$A_2A_4$との交点Pは線分$A_1A_3$を$t:1-t$に内分するとする．

(1) $\vec{a}$および$\vec{d}$を，$\vec{b}$，$\vec{c}$，kを用いて表せ．

(2) tをkを用いて表し，$\dfrac{1}{2}\leqq t<\dfrac{3}{4}$を示せ．

(3) 不等式$\dfrac{\triangle PA_2A_3}{\triangle A_1A_2A_4}>\dfrac{1}{12}$を示せ．

(3)



対応する円周角が等しいなどの条件から、

$\triangle A_1A_4P \backsim \triangle A_3A_2P$

かつ $A_2A_3 /\!/ A_1A_4$ となる。

四角形$A_1A_2A_3A_4$の面積をSとすると、

$\triangle PA_2A_3=(1-t)^2S$

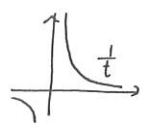
$\triangle A_1A_2A_4=tS$

$$\frac{\triangle PA_2A_3}{\triangle A_1A_2A_4}=\frac{(1-t)^2S}{tS}=\frac{(1-t)^2}{t}$$

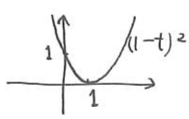
$\frac{1}{2}\leqq t<\frac{3}{4}$の範囲で$\frac{(1-t)^2}{t}$の最小値を求める。

$$\frac{(1-t)^2}{t}=\frac{1}{t}\times(1-t)^2$$

関数$\frac{1}{t}$は$\frac{1}{2}\leqq t<\frac{3}{4}$で単調減少



関数$(1-t)^2$は$\frac{1}{2}\leqq t<\frac{3}{4}$で単調減少



よって$\frac{(1-t)^2}{t}$は$t=\frac{3}{4}$で最小値をとり、

$$\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)\right\}^2\times\frac{4}{3}=\frac{1}{12}$$

以上より、$\dfrac{\triangle PA_2A_3}{\triangle A_1A_2A_4}>\dfrac{1}{12}$が示された。

図