$\boxed{1}$ 平面上の点 O を中心とする半径 1 の円を C とする．円 C の内部に点 A がある．円 C の周上を 2 点 P，Q が条件 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を満たしながら動く．線分 PQ の中点を R とする．また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$|\vec{a}| = r$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \vec{q}$ とする．ただし，$0 < r < 1$ とする．

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{AR}}|^2$ を内積 $\vec{p} \cdot \vec{q}$ を用いて表せ．

(2) 直線 OA 上の点 B で，$|\overrightarrow{\mathrm{BR}}|^2$ が 2 点 P，Q の位置によらず一定であるものを求めよ．また，このときの $|\overrightarrow{\mathrm{BR}}|^2$ の値を r を用いて表せ．

（北海道大学　2017）

$\boxed{2}$ 正四面体ABCDの頂点を移動する点Pがある．点Pは，1秒ごとに，隣の3頂点のいずれかに等しい確率 $\dfrac{a}{3}$ で移るか，もとの頂点に確率 $1-a$ で留まる．初め頂点Aにいた点Pが，n 秒後に頂点Aにいる確率を p_n とする．ただし，$0<a<1$ とし，n は自然数とする．

(1) 数列 $\{p_n\}$ の漸化式を求めよ．

(2) 確率 p_n を求めよ．

（北海道大学　2017）

$\boxed{3}$ a，b を実数とし，関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + (a^2 - b)x + \int_{-1}^{1} f(t)\,dt$$

を満たすとする．

(1) $f(0)$ の値を a を用いて表せ．

(2) 関数 $f(x)$ が $x > 1$ の範囲で極大値を持つとする．このような a，b が満たす条件を求めよ．また，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ の存在範囲を座標平面上に図示せよ．

（北海道大学　2017）

$\boxed{4}$ 自然数の 2 乗となる数を平方数という.

(1) 自然数 a, n, k に対して, $n(n+1)+a=(n+k)^2$ が成り立つとき,

$$a \geqq k^2+2k-1$$

が成り立つことを示せ.

(2) $n(n+1)+14$ が平方数となるような自然数 n をすべて求めよ.

(北海道大学 2017)

$\boxed{5}$ 関数 $f(x)=1+\sin x-x\cos x$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の $0 \leqq x \leqq 2\pi$ における増減を調べ，最大値と最小値を求めよ．

(2) $f(x)$ の不定積分を求めよ．

(3) 次の定積分の値を求めよ．

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx$$

（北海道大学　2017）

$\boxed{6}$ 複素数平面上に 3 点 O，A，B を頂点とする △OAB がある．ただし，O は原点とする．△OAB の外心を P とする．3 点 A，B，P が表す複素数を，それぞれ α，β，z とするとき，

$$\alpha\beta = z$$

が成り立つとする．

(1) 複素数 α の満たすべき条件を求め，点 A(α) が描く図形を複素数平面上に図示せよ．

(2) 点 P(z) の存在範囲を求め，複素数平面上に図示せよ．

（北海道大学　2017）

$\boxed{7}$ さいころを続けて投げて，数直線上の点Pを移動させるゲームを行う．初め点Pは原点0にいる．さいころを投げるたびに，出た目の数だけ，点Pを現在の位置から正の向きに移動させる．この試行を続けて行い，点Pが10に達するか越えた時点でゲームを終了する．n回目の試行でゲームが終了する確率をp_nとする．

(1) $p_{10}=\left(\dfrac{1}{6}\right)^9$となることを示せ．

(2) p_9の値を求めよ．

(3) p_3の値を求めよ．

（北海道大学　2017）

$\boxed{8}$ 座標平面上の3点A(1, 0), B(3, 1), C(2, 2)を頂点とする$\triangle$ABCの内部および境界をTとおく．実数aに対して，条件

$$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2 \leqq a$$

を満たす座標平面上の点Pの全体をDとする．ただし，APは点Aと点Pの距離を表す．

(1) Dが少なくとも1つの点Pを含むようなaの値の範囲を求めよ．

(2) DがTを含むようなaの値の範囲を求めよ．

(3) (1)のもとで，DがTに含まれるようなaの値の範囲を求めよ．

（北海道大学　2017）