______ 年　番号 ______　氏名 ______________________________

$\boxed{1}$ k を実数とする．放物線 $C : y = -2x^2$ と直線 $\ell : y = kx - 2$ の交点を P，Q とする．

(1) 点 P の x 座標を α，点 Q の x 座標を β としたとき，$\alpha + \beta$ と $\alpha\beta$ の値を k を用いて表せ．

(2) 点 P，Q における C の接線をそれぞれ引き，その交点を R とする．k がすべての実数を動くとき，点 R の軌跡を求めよ．

（弘前大学　2016）

弘前大学

2016年 文系 第1問

$\boxed{1}$ kを実数とする．放物線$C : y=-2x^2$と直線$\ell : y=kx-2$の交点をP，Qとする．

(1) 点Pのx座標をα，点Qのx座標をβとしたとき，$\alpha+\beta$と$\alpha\beta$の値をkを用いて表せ．

(2) 点P，QにおけるCの接線をそれぞれ引き，その交点をRとする．kがすべての実数を動くとき，点Rの軌跡を求めよ．

(1) $kx-2-(-2x^2)=0$

$\therefore 2x^2+kx-2=0$　判別式$D=k^2+16>0$より，kの値によらず異なる2点で交わる．

この方程式の解がα, βなので解と係数の関係により，

$\underline{\alpha+\beta=-\frac{k}{2},\ \alpha\beta=-1}$〃

(2) $P(\alpha, -2\alpha^2)$，$Q(\beta, -2\beta^2)$，$y'=-4x$より，

Pにおける接線は．$y=-4\alpha(x-\alpha)-2\alpha^2$　$\therefore y=-4\alpha x+2\alpha^2 \cdots①$

Qにおける接線は．$y=-4\beta x+2\beta^2 \cdots②$

①－②より，$-4(\alpha-\beta)x+2(\alpha^2-\beta^2)=0$

$\therefore -4(\alpha-\beta)\left\{x-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right\}=0$

$\alpha\neq\beta$より，$x=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$　このとき①より，$y=-2\alpha\beta$

$\therefore R(X, Y)$とおくと，$R\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, -2\alpha\beta\right)$

$$\therefore \begin{cases} X=\dfrac{\alpha+\beta}{2} \\ Y=-2\alpha\beta \end{cases} \iff \begin{cases} X=-\dfrac{1}{4}k \\ Y=2 \end{cases} \quad (\because (1)\text{より})$$

kはすべての実数を動くとき，

点Rの軌跡は．$\underline{\text{直線 } y=2}$〃