＿＿＿年　番号＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 実数 a，b に対して

$$f(\theta)=\cos 3\theta+a\cos 2\theta+b\cos\theta$$

とし，$0<\theta<\pi$ で定義された関数

$$g(\theta)=\frac{f(\theta)-f(0)}{\cos\theta-1}$$

を考える．

(1) $f(\theta)$ と $g(\theta)$ を $x=\cos\theta$ の整式で表せ．

(2) $g(\theta)$ が $0<\theta<\pi$ の範囲で最小値 0 をとるための a，b についての条件を求めよ．また，条件をみたす点 $(a,\ b)$ が描く図形を座標平面上に図示せよ．

（東京大学　2017）

$\boxed{2}$ $0\leqq x\leqq 2$ とする．

(1) $\sin\pi x+\cos 2\pi x\geqq 0$ を満たす x の範囲を求めよ．

(2) (1) で求めた x の範囲に対し，

$$\log_2(3+x)+\log_2(5-x)=\log_2(16-k)$$

の解がひとつだけであるような実数 k の範囲を求めよ．

（三重大学　2016）

$\boxed{3}$ θ のとる値の範囲が $\dfrac{\pi}{12}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$ である関数

$$y=\frac{4}{1+\tan^2\theta}+2\sin^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta$$

を考える．

(1) y の最大値は $\boxed{\text{エ}}$ となり，そのとき θ の値は $\boxed{\text{オ}}$ である．

(2) y の最小値は $\boxed{\text{カ}}$ となり，そのとき θ の値は $\boxed{\text{キ}}$ である．

（早稲田大学　2015）

0002369810367999

東京大学

2017年 理系 第1問

数理 石井K

1 実数 a, b に対して

$$f(\theta) = \cos 3\theta + a\cos 2\theta + b\cos\theta$$

とし，$0 < \theta < \pi$ で定義された関数

$$g(\theta) = \frac{f(\theta) - f(0)}{\cos\theta - 1}$$

を考える．

(1) $f(\theta)$ と $g(\theta)$ を $x = \cos\theta$ の整式で表せ．

(2) $g(\theta)$ が $0 < \theta < \pi$ の範囲で最小値 0 をとるための a, b についての条件を求めよ．また，条件をみたす点 $(a,\ b)$ が描く図形を座標平面上に図示せよ．

(1) $f(\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta + a(2\cos^2\theta - 1) + b\cos\theta$

$= 4\cos^3\theta + 2a\cos^2\theta + (b-3)\cos\theta - a$

$= \underline{4x^3 + 2ax^2 + (b-3)x - a}$ //

$g(\theta) = \dfrac{4x^3+2ax^2+(b-3)x-a-(1+a+b)}{x-1}$

$= \underline{4x^2+2(a+2)x+2a+b+1}$ //

$$\begin{array}{r} 4x^2+(2a+4)x+2a+b+1 \\ x-1\,\big)\ 4x^3+2ax^2+(b-3)x-2a-b-1 \\ 4x^3-4x^2 \\ \hline (2a+4)x^2+(b-3)x \\ (2a+4)x^2-(2a+4)x \\ \hline (2a+b+1)x-2a-b-1 \\ (2a+b+1)x-2a-b-1 \\ \hline 0 \end{array}$$

(2) $0 < \theta < \pi$ より，$-1 < x < 1$

$g(\theta) = 4\left(x + \dfrac{a+2}{4}\right)^2 - \dfrac{(a+2)^2}{4} + 2a + b + 1$

$= 4\left(x + \dfrac{a+2}{4}\right)^2 - \dfrac{1}{4}a^2 + a + b$

＊最小値をもつのは，$-1<x<1$ より頂点がこの区間に含まれる場合のみである．

∴ 最小値0をとるのは，$-1 < -\dfrac{a+2}{4} < 1$ かつ $-\dfrac{1}{4}a^2 + a + b = 0$ のとき

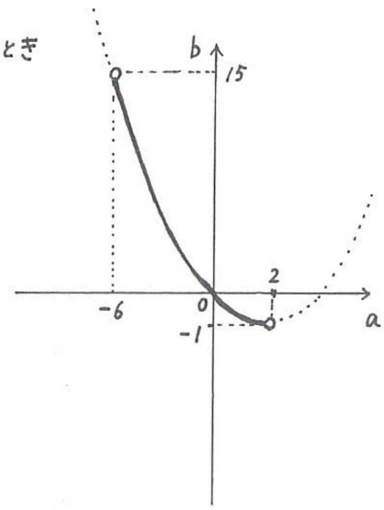
∴ $-6 < a < 2$ かつ $b = \dfrac{1}{4}a^2 - a$

∴ 求める条件は，$\underline{b = \dfrac{1}{4}a^2 - a \ (-6 < a < 2)}$ //

$b = \dfrac{1}{4}(a-2)^2 - 1$ より (a, b) が描く図形は

右のようになる．

ただし，両端点は含まない



0002196723087999

三重大学

2016年 人文学部 第2問

$\boxed{2}$ $0 \leqq x \leqq 2$ とする.

(1) $\sin \pi x + \cos 2\pi x \geqq 0$ を満たす x の範囲を求めよ.

(2) (1) で求めた x の範囲に対し,

$$\log_2(3+x) + \log_2(5-x) = \log_2(16-k)$$

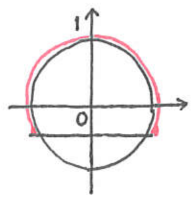
の解がひとつだけであるような実数 k の範囲を求めよ.

(1) $\sin \pi x + \cos 2\pi x = \sin \pi x + 1 - 2\sin^2 \pi x$

$= -(2\sin \pi x + 1)(\sin \pi x - 1)$

∴ 不等式は, $(2\sin \pi x + 1)(\sin \pi x - 1) \leqq 0$

∴ $-\frac{1}{2} \leqq \sin \pi x \leqq 1$



ここで, $0 \leqq \pi x \leqq 2\pi$ より, $0 \leqq \pi x \leqq \frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi \leqq \pi x \leqq 2\pi$

よって, $\underline{0 \leqq x \leqq \frac{7}{6},\ \frac{11}{6} \leqq x \leqq 2}$ //

(2) 真数条件より, $3+x>0$ かつ $5-x>0$ かつ $16-k>0$

よって (1) で求めた x の範囲とあわせて, $0 \leqq x \leqq \frac{7}{6}$, $\frac{11}{6} \leqq x \leqq 2$, $k<16$ …(*)

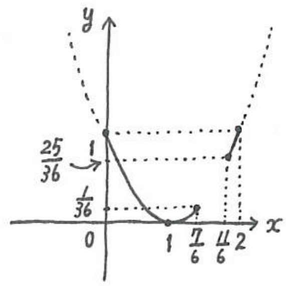
このとき,

$\log_2(3+x)(5-x) = \log_2(16-k)$

∴ $-x^2+2x+15 = 16-k$

∴ $x^2-2x+1 = k$

$y=(x-1)^2$ $\left(0 \leqq x \leqq \frac{7}{6},\ \frac{11}{6} \leqq x \leqq 2\right)$ のグラフは右のようになる.



よって, これと $y=k$ の交点の個数が1個となるのは,

$\underline{k=0,\ \frac{1}{36}<k<\frac{25}{36}}$ //

0001982637108999

早稲田大学

2015年 国際教養学部 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ θのとる値の範囲が $\frac{\pi}{12} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}$ である関数

$$y = \frac{4}{1+\tan^2\theta} + 2\sin^2\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta$$

を考える．

(1) yの最大値は $\boxed{\text{エ}}$ 5 となり，そのときθの値は $\boxed{\text{オ}}$ $\frac{\pi}{6}$ である．

(2) yの最小値は $\boxed{\text{カ}}$ 4 となり，そのときθの値は $\boxed{\text{キ}}$ $\frac{\pi}{3}$ である．

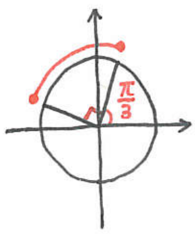
(1) $\frac{4}{1+\tan^2\theta} = 4\cos^2\theta$ より．

$$y = 4\cos^2\theta + 2\sin^2\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta$$

$$= 4\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2} + 2\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2} + \sqrt{3}\sin 2\theta$$

$$= \sqrt{3}\sin 2\theta + \cos 2\theta + 3$$

$$= 2\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right) + 3 \quad \cdots (*)$$



$\frac{\pi}{12} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}$ より．$\frac{\pi}{3} \leqq 2\theta + \frac{\pi}{6} \leqq \frac{5}{6}\pi$

$\therefore$ yの最大値は．5 ，そのとき．$2\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

すなわち．$\theta = \frac{\pi}{6}$

(2) (1)と同様に，(*)より．

yの最小値は．4 そのとき．$2\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$

すなわち．$\theta = \frac{\pi}{3}$