______ 年　番号 ______　氏名 ______________________________

$\boxed{1}$ 点 A$(-1,\ -3)$ から円 $x^2+y^2=5$ に接線を引くと，接点の座標は $(-\boxed{セ},\ -\boxed{ソ})$ と $(\boxed{タ},\ -\boxed{チ})$ である．また，2 本の接線と円で囲まれた部分（ただし，円の内部を含まない）の面積は，$\boxed{ツ}-\dfrac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}\pi$ である．

（東京経済大学　2016）

$\boxed{2}$ 直線 $\ell : (1+\sqrt{3})x+(1-\sqrt{3})y=4$ が，曲線 $C : x^2+y^2=r^2\ (r>0,\ x \geqq 0)$ に接する．次の問いに答えよ．

(1) r の値を求めよ．

(2) 点 $\mathrm{A}(a,\ 1)$ が直線 ℓ 上の点であるとき，a の値を求めよ．

(3) (2) で求めた点 A から曲線 C に引いた ℓ 以外の接線 m の方程式を求めよ．

(4) 曲線 C と 2 つの接線 ℓ，m で囲まれた図形の面積を求めよ．

（県立広島大学　2012）

$\boxed{3}$ kを実数とし，円 $x^2+y^2=1$ と直線 $x+2y=k$ が異なる 2 点で交わるものとする．その 2 つの交点を P，Q とする．次の問いに答えよ．

(1) k の値の範囲を求めよ．

(2) 2 点 P，Q を通る円の中心は直線 $y=2x$ 上にあることを示せ．

(3) 上の (2) の円の中心を $(a,\ 2a)$，半径を r とする．r^2 を a と k で表せ．

(4) 点 R の座標を (2, 1) とする．k の値が (1) で求めた範囲を動くとき，3 点 P，Q，R を通る円の中心の x 座標の範囲を求めよ．

（長崎大学　2014）

0002320639767999

東京経済大学

数理 石井K

2016年 全学部 第3問

$\boxed{3}$ 点A$(-1,\ -3)$から円$x^2+y^2=5$に接線を引くと，接点の座標は$(-\boxed{セ},\ -\boxed{ソ})$と$(\boxed{タ},\ -\boxed{チ})$である．また，2本の接線と円で囲まれた部分（ただし，円の内部を含まない）の面積は，$\boxed{ツ}-\dfrac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}\pi$である．

2　1　1　2　5
5　4

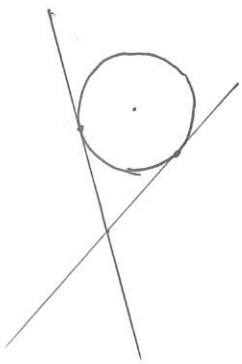
点Aは円上の点ではない

接点を(s, t)とおくと．これは円上にあるので $s^2+t^2=5 \cdots①$

このとき．接線は $sx+ty=5$ と表される．

これは点Aを通るので，

$-s-3t=5 \qquad \therefore s=-3t-5 \cdots②$



②を①に代入して．$(-3t-5)^2+t^2=5$

$\therefore 10t^2+30t+20=0$

$t^2+3t+2=0$

$(t+1)(t+2)=0$

$\therefore t=-1, -2$

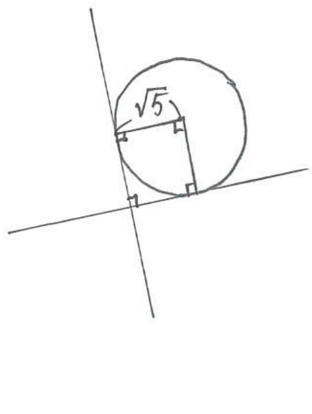
②より．$(s, t)=\underline{(-2, -1), (1, -2)}$ //

このとき 2つの接線は．$y=-2x-5$ と．$y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$

これらは垂直に交わる．さらに接点と円の中心を結ぶ

線分は接線に垂直に交わるから

右図のようになる．



よって．正方形からおうぎ形を引けばよい

$(\sqrt{5})^2-\pi(\sqrt{5})^2\times\frac{1}{4}=\underline{5-\frac{5}{4}\pi}$ //

2012年 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 直線 $\ell : (1+\sqrt{3})x + (1-\sqrt{3})y = 4$ が，曲線 $C : x^2 + y^2 = r^2\ (r > 0,\ x \geqq 0)$ に接する．次の問いに答えよ．

(1) r の値を求めよ．

(2) 点 A$(a,\ 1)$ が直線 ℓ 上の点であるとき，a の値を求めよ．

(3) (2) で求めた点 A から曲線 C に引いた ℓ 以外の接線 m の方程式を求めよ．

(4) 曲線 C と 2 つの接線 ℓ，m で囲まれた図形の面積を求めよ．

(1) ℓ と C が接する $\Longleftrightarrow$ ℓ と原点とのキョリが r

$$\therefore \frac{|-4|}{\sqrt{(1+\sqrt{3})^2+(1-\sqrt{3})^2}} = r$$

$$\therefore 4 = 2\sqrt{2}\, r \qquad \therefore \underline{r = \sqrt{2}}\ /\!/$$

(2) $(1+\sqrt{3})a + (1-\sqrt{3})\cdot 1 = 4$

$$\therefore a = \frac{3+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \underline{\sqrt{3}}\ /\!/$$

(3) 接点を (s, t) とおくと，C の接線は，

$sx + ty = 2$ と表され，これが A$(\sqrt{3}, 1)$ を通るから

$\sqrt{3}s + t = 2 \cdots ①$

また，(s, t) は C 上の点より，

$s^2 + t^2 = 2 \cdots ②$

①を②に代入して．$s^2 + (2-\sqrt{3}s)^2 = 2$

$\therefore 2s^2 - 2\sqrt{3}s + 1 = 0 \qquad \therefore s = \dfrac{\sqrt{3}\pm 1}{2},\ t = \dfrac{1\mp\sqrt{3}}{2}$ （複号同順）

$\therefore$ 接線は．$(\sqrt{3}+1) + (1-\sqrt{3})y = 4$ と $(\sqrt{3}-1)x + (1+\sqrt{3})y = 4$

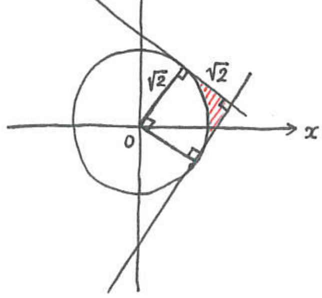
ℓ

$$\therefore \underline{m : (\sqrt{3}-1)x + (1+\sqrt{3})y = 4}\ /\!/$$

(4) $(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1) + (1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) = 0$ より．$\ell \perp m$

$\therefore$ 右図のようになり，

$$S = (\sqrt{2})^2 - \pi(\sqrt{2})^2\cdot\frac{1}{4} = \underline{2 - \frac{\pi}{2}}\ /\!/$$



0001934185608999

2014年 医学部 第1問

数理 石井K

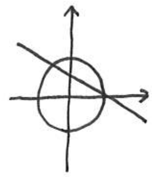
$\boxed{1}$ k を実数とし，円 $x^2+y^2=1$ と直線 $x+2y=k$ が異なる2点で交わるものとする．その2つの交点をP，Qとする．次の問いに答えよ．

(1) k の値の範囲を求めよ．

(2) 2点P，Qを通る円の中心は直線 $y=2x$ 上にあることを示せ．

(3) 上の(2)の円の中心を $(a,\ 2a)$，半径を r とする．r^2 を a と k で表せ．

(4) 点Rの座標を $(2,\ 1)$ とする．k の値が(1)で求めた範囲を動くとき，3点P，Q，Rを通る円の中心の x 座標の範囲を求めよ．



(1) 点と直線のキョリ公式より. $\frac{|-k|}{\sqrt{1^2+2^2}} < 1$ (円の半径) ∴ $|k| < \sqrt{5}$

∴ $-\sqrt{5} < k < \sqrt{5}$ //

(2) $P(\alpha, \frac{k-\alpha}{2})$, $Q(\beta, \frac{k-\beta}{2})$ とおける

α, β は $x^2 + (\frac{k-x}{2})^2 = 1$ すなわち, $5x^2 - 2kx + k^2 - 4 = 0$ の解なので,

解と係数の関係より, $\alpha+\beta = \frac{2}{5}k$, $\alpha\beta = \frac{k-4}{5}$

∴ P, Q の中点は $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{2k-(\alpha+\beta)}{4}\right) = \left(\frac{k}{5}, \frac{2}{5}k\right)$

(また, $\beta - \alpha = \frac{2k+\sqrt{D}}{10} - \frac{2k-\sqrt{D}}{10} = \frac{\sqrt{D}}{5} = \frac{4\sqrt{5-k^2}}{5}$ ($\beta > \alpha$ とした)) 使わなかった

∴中点を通り, PQに垂直な直線は $y = 2\left(x - \frac{k}{5}\right) + \frac{2}{5}k$ ∴ $y = 2x$ ▨

(3) 点と直線のキョリ公式より, (点 $(a, 2a)$ と直線 $x+2y=k$ に対して使う)

$$\left(\frac{|a+4a-k|}{\sqrt{1^2+2^2}}\right)^2 = r^2 - \frac{PQ^2}{4} \quad \therefore\ r^2 = \frac{(5a-k)^2}{5} + \frac{5-k^2}{5} \quad r^2 = 5a^2 - 2ka + 1$$ //

(4) (2),(3)より. 円は. $(x-a)^2 + (y-2a)^2 = 5a^2 - 2ka + 1$

これが $R(2, 1)$ を通るので, $(2-a)^2 + (1-2a)^2 = 5a^2 - 2ka + 1$

∴ $a = \frac{2}{4-k}$ (1)より $-\sqrt{5} < k < \sqrt{5}$ なので,

$$\frac{2}{4+\sqrt{5}} < a < \frac{2}{4-\sqrt{5}} \iff \frac{8-2\sqrt{5}}{11} < a < \frac{8+2\sqrt{5}}{11}$$ //